بسم الله الرحمن الرحيم

الفرع : الإدارة المعلوماتية و الأدبي

المستوى : الرابع

الوحدة : الأولى + الثانية

الخالد في :

التكامل و الإحتمالات

نضال شلباية

إعداد المعلم : نضال شلباية

0799229642

بسم الله الرحمن الرحيم

الوحدة : الأولى

الخالد في :

التكامل

نضال شلباية

إعداد المعلم : نضال شلباية

0799229642

نضال شلــبابة

مراجعة عامة

- جمع وطرح الأعداد الصحيحة

① + ⊕ + = + (نجمع العددين)

② - ⊕ - = - (نجمع العددين)

③ + ⊕ - = إشارة الأكبر (نطرح العددين)

مثال: جد ناتج كل مما يلي :-

① $-٩ + (-٤) =$

② $-٧ + (-٨) =$

③ $-٨ - ٥ =$

④ $-١٠ - ٦ =$

⑤ $-٩ + ٦ =$

⑥ $٨ - ١٥ =$

⑦ $-١٢ + ١٨ =$

⑧ $-٩ - (-٧) =$

⑨ $١٠ - (-٥) =$

⑩ $١٢ - ١٥ =$

⑪ $-٧ - ١٠ =$

⑫ $-٨ - (-٤) =$

⑬ $١٦ - (-٧) =$

⑭ $-١٣ + ٧ =$

⑮ $٩ - ١٢ + ٨ =$

⑯ $-٢ - ٧ - ٨ =$

- ضرب وقسمة الأعداد الصحيحة

① + ⊗ + = +

② - ⊗ - = +

③ + ⊗ - = -

مثال: جد ناتج كل مما يلي :-

① $-٤ \times -٧ =$

② $٧ \times ٨ =$

③ $-٦ \times ٩ =$

④ $٣ \times -٤ =$

⑤ $(٢)^{٢} =$ $\sqrt{٤} =$

⑥ $(٢)^{٣} =$ $\sqrt[٣]{٨} =$

⑦ $(٢)^{٤} =$ $\sqrt[٤]{١٦} =$

⑧ $(-٢)^{٢} =$ $\sqrt{٤} =$

⑨ $(-٢)^{٣} =$ $\sqrt[٣]{-٨} =$

⑩ $(٣)^{٢} =$ $\sqrt{٩} =$

⑪ $(٣)^{٣} =$ $\sqrt[٣]{٢٧} =$

مثال: إذا كان $ق(س) = س^{٢} - ٣س + ٤$

نجد قيمة :-

① $ق(٠) =$

② $ق(١) =$

③ $ق(-١) =$

④ $ق(٢) =$

⑤ $ق(-٢) =$

مثال: إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \dfrac{\sqrt{\text{س}+3}+7}{2\text{س}+3}$

فما قيمة ق(٦)؟

الحل:

مثال: إذا كان

$\text{ع}(\text{س}) = \begin{cases} \text{س}^2+3 & ، \text{س} > 2 \\ 3\text{س}-1 & ، \text{س} \leq 2 \end{cases}$

فما قيمة: -

① ع(٢) =

② ع(١) =

③ ع(٤) =

- تحليل المقادير الجبرية

أ) التحليل بأخذ العوامل المشتركة

١) $\text{س}^2 - 3\text{س} =$

٢) $3\text{س}^2 + 6\text{س} =$

٣) $2\text{س}^3 - 10\text{س}^2 =$

٤) $3\text{س} - 12 =$

٥) $2\text{س} - 4 =$

ب) تحليل الفرق بين مربعين

$(\text{س}^2 - \text{أ}^2) = (\text{س} - \text{أ})(\text{س} + \text{أ})$

١) $\text{س}^2 - 9 =$

٢) $\text{س}^2 - 25 =$

٣) $4 - \text{س}^2 =$

٤) $(\text{س}+3)^2 - 16 =$

نضال شلـــباية

ب) تحليل الفرق بين مكعبين

$(س^{٣} - أ^{٣}) = (س - أ)(س^{٢} + أس + أ^{٢})$

١) $س^{٣} - ٨ =$

٢) $س^{٣} - ٢٧ =$

٣) $٨س^{٣} - ٦٤ =$

د) تحليل مجموع بين مكعبين

$(س^{٣} + أ^{٣}) = (س + أ)(س^{٢} - أس + أ^{٢})$

١) $س^{٣} + ٦٤ =$

٢) $٨ك^{٣} + ١٢٥ =$

٣) $٢٧ك^{٣} + ٦٤ =$

جـ) تحليل الصورة العامة للمعادلة التربيعية

الصورة العامة للمعادلة التربيعية

$أس^{٢} + ب س + جـ = ٠$

$س_{١،٢} = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^{٢} - ٤ أ جـ}}{٢أ}$

مثال: جد ناتج كل مما يلي:

١) $س^{٢} - س - ٢ = ٠$

٢) $س^{٢} - ٥س - ٦ = ٠$

٣) $س^{٢} + ٢س - ٨ = ٠$

نضال شلـــباية

التكامل غير المحدود

قاعدة (1): $\int أ\, دس = أ س + ج$

أمثلة: أوجد التكاملات التالية:

1) $\int 5\, دس =$

2) $\int \frac{7}{2}\, دس =$

3) $\int -7\, دس =$

4) $\int -35\, دع =$

5) $\int 9\, دل =$

6) $\int -4\, دهـ =$

7) $\int دس =$

8) $\int -\, دع =$

9) $\int \sqrt{8}\, دس =$

10) $\int أ^{2}\, دس =$

11) $\int \frac{دع}{5} =$

12) $\int \frac{ط}{هـ}\, دس =$

13) $\int \frac{1}{ع}\, دس =$

14) $\int هـ^{2}\, دس =$

15) $\int (جاهـ + جتاهـ)\, دهـ =$

قاعدة (2): $\int س^{ن}\, دس = \frac{س^{ن+1}}{ن+1} + ج$

حيث $ن \neq -1$

أمثلة: أوجد ناتج كل من التكاملات التالية:

1) $\int س^{2}\, دس =$

2) $\int س^{7}\, دس =$

3) $\int ص^{5}\, دس =$

4) $\int س^{-4}\, دس =$

5) $\int س^{-7}\, دس =$

6) $\int \frac{1}{س^{-4}}\, دس =$

7) $\int \frac{1}{س^{\frac{1}{2}}}\, دس =$

8) $\int \sqrt[5]{س^{3}}\, دس =$

9) $\int \sqrt[3]{س^{-4}}\, دس =$

10) $\int \frac{1}{\sqrt[7]{س^{2}}}\, دس =$

11) $\int \frac{دس}{\sqrt[3]{س}} =$

قاعدة (٣): "الخاصية الخطية"

أ) $\int أ \times ق(س)\, دس = أ \times \int ق(س)\, دس$

ب) $\int (ق(س) \pm هـ(س))\, دس = \int ق(س)\, دس \pm \int هـ(س)\, دس$

مثال: أوجد ناتج كل مما يلي:

١) $\int ٤س^{٢}\, دس =$

٢) $\int ٧س^{٣}\, دس =$

٣) $\int \frac{٧}{س^{٢}}\, دس =$

٤) $\int \frac{٥}{س^{٢}}\, دس =$

٥) $\int ٨\sqrt[٧]{س^{-٣}}\, دس =$

٦) $\int \frac{٥}{\sqrt{س}}\, دس =$

٧) $\int (٣س + ٥)\, دس =$

٨) $\int (٣س - ١)\, دس =$

٩) $\int (٢س - س^{٣})\, دس =$

١٠) $\int (٤س^{٣} + ٣س^{٢})\, دس =$

١١) $\int (س^{٣} + س^{٢} + ٥س^{٤} + ٧س - ٣)\, دس$

١٢) $\int (س^{٤} + س^{٢} - ٣س + ٥)\, دس =$

١٣) $\int (٣س^{٥} - \sqrt{س} + ٩)\, دس =$

١٤) $\int (٥س^{٤} - ٢\sqrt[٣]{س} + ١)\, دس =$

١٥) $\int (س^{\frac{٥}{٤}} + ٧س^{-٢})\, دس =$

١٦) $\int (س^{-٣} + ٧س^{-٢} + \frac{٨}{س^{-٤}})\, دس =$

١٧) $\int (٣س^{٢} - \frac{٢}{س^{٣}} + ٤\sqrt[٣]{س^{٢}})\, دس =$

١٨) $\int (\sqrt[٤]{س^{٥}} + \frac{٣}{س^{٢}} - ٢س^{٤})\, دس =$

١٩) $\int (\sqrt{س^{٧}} + \sqrt[٥]{س^{٢}} + \sqrt[٤]{س} + س^{٢})\, دس =$

٢٠) $\int \sqrt{س}\left(\frac{٢}{\sqrt{س}} + \sqrt{س^{٢}}\right) ءس =$

٢١) $\int س^{٢}\left(\frac{٣}{\sqrt{س^{٥}}} - \frac{٢}{٥} + \sqrt{س^{٣}}\right) ءس =$

٢٢) $\int \left(\sqrt{س}\ \sqrt{س}\right) ءس =$

٢٣) $\int \left(\sqrt{س} + ٣\right)\left(\sqrt{س^{٢}} + ٥\right) ءس =$

٢٤) $\int \left(٥س + ٢\right)\left(\sqrt{س} - ١\right) ءس =$

٢٥) $\int \left(٢س + ٣\right)^{٢} ءس =$

٢٦) $\int \left(س^{٢} + ٣\right)^{٢} ءس =$

٢٧) $\int \frac{\sqrt{س^{٥}} + \sqrt{س^{٣}} + س^{٢} + س}{س} ءس =$

٢٨) $\int \frac{\sqrt{س^{٤}} + \sqrt{س^{٣}} + \sqrt{س^{٢}}}{\sqrt{س^{٢}}} ءس =$

٢٩) $\int \frac{٨ - س^{٦}}{٢س^{٣}} ءس =$

٣٠) $\int \frac{س^{٦} - ٥}{\sqrt[٣]{س}} ءس =$

٣١) $\int \frac{٢س^{٣} - ٤س - ٦}{\sqrt{س}} ءس =$

٣٢) $\int \frac{س^{٢} - ٢٥}{س + ٥} ءس =$

٣٣) $\int \frac{س^{٤} - ١٦}{س - ٢} ءس =$

٣٤) $\int \frac{٢س^{٢} - ٢}{س - ١} ءس =$

٣٥) $\int \frac{٣س^{٢} - ٢٧}{٢س + ٦} ءس =$

٣٦) $\int \frac{س^3 + 8}{س + 2}\, دس =$

٣٧) $\int \frac{8س^3 - 125}{2س - 5}\, دس =$

٣٨) $\int \frac{2س^3 + 2}{س + 1}\, دس =$

٣٩) $\int \frac{س^3 - 27}{س - 3}\, دس =$

٤٠) $\int \frac{3س - 6}{س - 2}\, دس =$

٤١) $\int \frac{س^2 + 3س - 4}{س + 4}\, دس =$

٤٢) $\int \frac{س^2 - 6س + 8}{س - 2}\, دس =$

٤٣) $\int \frac{س^2 - 5س - 24}{2س - 16}\, دس =$

٤٤) $\int \frac{س^2 - س - 6}{س - 3}\, دس =$

قاعدة ④ : " تكامل الاقترانات الدائرية "

أ) $\int جتاس\, دس = جاس + ج$

ب) $\int جاس\, دس = -جتاس + ج$

جـ) $\int قا^2س\, دس = ظاس + ج$

تذكير :

١) $قاس = \frac{1}{جتاس} \Leftarrow قا^2س = \frac{1}{جتا^2س}$

٢) $ظاس = \frac{جاس}{جتاس}$

مثال : جد ما يلي :-

١) $\int (جاس + قا^2س)\, دس =$

٢) $\int (3جتاس - جاس)\, دس =$

٢) $\int (٤\,\text{قا}^{٢}\text{س} + ٤\,\text{جاس})\,\text{ءس} =$

٤) $\int (-٣\,\text{جاس} + \text{قا}^{٢}\text{س} + \text{جتاس})\,\text{ءس} =$

٥) $\int (٤\text{س}^{٣} - \frac{١}{٢}\,\text{جتاس} + ٤\,\text{قا}^{٢}\text{س})\,\text{ءس} =$

٦) $\int (٢\,\text{جتاس} + \frac{\text{قا}^{٢}\text{س}}{٢} + \sqrt[٥]{\text{س}})\,\text{ءس} =$

٧) $\int (-٣\,\text{جاس} + \sqrt{٣}\,\text{جتاس})\,\text{ءس} =$

٨) $\int \frac{٣}{(\text{قاس})^{٢}}\,\text{ءس} =$

٩) $\int \frac{٧}{(\text{جتاس})^{٢}}\,\text{ءس} =$

١٠) $\int \text{جتاس}\ \text{ظاس}\,\text{ءس} =$

١١) $\int (-٢\,\text{قا}^{٢}\text{س} \cdot \text{جتاس})\,\text{ءس} =$

قاعدة ⑤: ١) $\int \frac{١}{\text{س}}\,\text{ءس} = \text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س}| + \text{جـ}$

٥) $\int \frac{\text{أ}}{\text{س}}\,\text{ءس} = \text{أ}\ \text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س}| + \text{جـ}$

٦) $\int \text{أ}\,\text{هـ}^{\text{س}}\,\text{ءس} = \text{أ}\,\text{هـ}^{\text{س}} + \text{جـ}$

مثال: جد ناتج كل مما يلي:

١) $\int \frac{٣}{\text{س}}\,\text{ءس} =$

٢) $\int \frac{-\text{ءس}}{\text{س}} =$

٣) $\int \frac{-٢}{٥\text{س}}\,\text{ءس} =$

٤) $\int (٣\,\text{هـ}^{\text{س}} + \frac{٦}{\text{س}})\,\text{ءس} =$

٥) $\int (٥\,\text{هـ}^{\text{س}} - \frac{٢}{٣\text{س}})\,\text{ءس} =$

٦) $\int (٣\,\text{هـ}^{\text{س}} - \text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{هـ}^{\text{س}} + \text{جتاس})\,\text{ءس} =$

٧) ∫ (−٣ هـ^س + ٢/س + قتا² س) ءس =

٨) ∫ (√س³ + ٤/س − ٥ هـ^س + جا س) ءس =

٩) ∫ (٢/∛س² − ٣/٥ + ٤ قتا² س − هـ^س) ءس =

١١) ∫ (١١/√س − جا س ظا س − ٧ هـ^س) ءس =

* **اشتقاق التكامل غير المحدود**

إذا كان ص = ∫ ق(س) ءس فإن

ءص/ءس = ق(س)

مثال:

١) ص = ∫ (جتا³ س + ٢) ءس . جد ءص/ءس

٢) ص = ∫ (س² + ٥س) ءس . جد ءص/ءس

٣) ق(س) = ∫ ١/(س + ٤) ءس . جد ق′(١)

٤) ق(س) = ∫ س²/(٣س + ١) ءس . جد ق′(٢)

٥) ص = ∫ (٥ − ٧س³) ءس . جد ءص/ءس

٦) ق(س) = ∫ (٢ − ٨س²) ءس . جد ق′(١)

٧) ص = ∫ (س³ + ٥س + ١)/(س² + ١١) ءس . جد ءص/ءس

٨) ص = ∫ (√س + ٧س)³ ءس . جد ءص/ءس

٩) ق(س) = ∫ ٣/(س² + ٧س + ١) ءس . جد ق′(س) ، ق′(٠)

نضال شلباية

العلاقة بين التكامل والتفاضل

١) ∫ ق'(س) دس = ق(س) + جـ

٢) ∫ ق''(س) دس = ق'(س) + جـ

٣) ق(س) ⟵ (تكامل) ق'(س) ، ق(س) ⟶ (مشتقة) ق'(س)

٤) ت ⟵ ع ⟵ ف

أمثلة:

١) إذا كان ∫ ق'(س) دس = ٦س² + ٢س + ٣

جد ق'(١) =

٢) إذا كان ∫ ق''(س) دس = ٤س³ − ٦س² + ٢

جد ق'(٢) =

٣) إذا كان ق(س) = ∫ هـ(س) دس = ٥س² + ٤س + ٨

أ) جد قاعدة الاقتران هـ(س).

ب) جد قاعدة الاقتران هـ'(س)

جـ) جد قاعدة الاقتران ق'(س).

٤) إذا كان ق'(س) = ٣س² − ١٠س ، فجد قاعدة الاقتران ق علماً بأن النقطة (٢ ، ٣) تقع على منحنى الاقتران ق.

٥) إذا كان ق(س) اقتراناً قابلاً للاشتقاق وكانت ق'(س) = ٣س² − ٤س + ١ ، فجد ق(−١) علماً أن ق(٣) = ٢.

٦) إذا كان ميل المماس لمنحنى الاقتران ق(س) عند النقطة (س ، ص) يساوي (٤س³ + ٦س² − ٣) فجد قاعدة الاقتران ق(س) علماً أن منحنى الاقتران ق يمر بالنقطة (−٢ ، ٥).

٧) إذا كان ميل المماس لمنحنى الاقتران ق(س) عند النقطة (س، ص) يساوي (٣س٢ − ١) جد قاعدة الاقتران ق(س) علماً أن ق(١) = −٢

٨) إذا كان ميل المماس لمنحنى الاقتران ق(س) عند النقطة (س، ص) يساوي (٢س). جد قاعدة الاقتران ق(س) علماً أن منحناه يمر بالنقطة (−٢، ٦)

٩) يتحرك جسيم في خط مستقيم بحيث تكون سرعته (ع) تعطى بالعلاقة ع(ن) = (٢ن + ٤) م/ث. جد المسافة التي يقطعها الجسيم بعد مرور ٣ ثواني من بدء الحركة علماً أن الموقع الابتدائي للجسيم ف(٠) = ٦م.

١٠) إذا كان تسارع جسيم (ت) بعد مرور (ن) ثانية يعطى بالعلاقة ت(ن) = (٦ن) م/ث٢. جد المسافة التي يقطعها الجسيم بعد مرور ثانية علماً أن السرعة الابتدائية (ع(٠) = ٢م/ث) والموقع الابتدائي (ف(٠) = ٥م)

١١) يتحرك جسيم على خط مستقيم بحيث أن سرعته بعد (ن) ثانية تساوي ع(ن) = ٦ن٢ + ٨ن + ٣ م/ث. جد المسافة التي يقطعها الجسيم بعد (ن) ثانية علماً أن موقعه الابتدائي ف(٠) = ٣م.

١٢) تتحرك نقطة على خط مستقيم بتسارع ثابت مقداره ١٢م/ث٢. جد سرعتها بعد زمن قدره (ن) ثانية علماً أن سرعتها الابتدائية ع(٠) = ٧م/ث. ثم جد سرعتها بعد مرور ثانيتين من بدء الحركة.

التكامل المحدود

1) $\int_{ا}^{ب} \text{جـ}\ \text{ءس} = \text{جـ}(\text{ب} - \text{ا})$

2) $\int_{ا}^{ب} \text{س}^{ن}\ \text{ءس} = \frac{\text{س}^{ن+1}}{ن+1}\Big|_{ا}^{ب} = \frac{\text{ب}^{ن+1} - \text{ا}^{ن+1}}{ن+1}$

مثال: احسب قيمة كل من التكاملات التالية:-

1) $\int_{1}^{3} 8\ \text{ءس} =$

2) $\int_{-1}^{3} -4\ \text{ءس} =$

3) $\int_{1}^{5} \sqrt{3}\ \text{ءس} =$

4) $\int_{4}^{1} \frac{7}{3}\ \text{ءس} =$

5) $\int_{0}^{5} \text{ا}\ \text{ءس} =$

6) $\int_{4}^{15} \pi\ \text{ءس} =$

7) $\int_{2}^{3} (\text{جاهـ} + \text{جتاهـ})\ \text{ءس} =$

8) $\int_{1}^{4} 2\text{س}\ \text{ءس} =$

9) $\int_{-2}^{3} \text{س}^{2}\ \text{ءس} =$

10) $\int_{1}^{3} \frac{1}{2\text{س}^{3}}\ \text{ءس} =$

11) $\int_{-1}^{1} (2\text{س} + 7)\ \text{ءس} =$

12) $\int_{2}^{3} (1 - 4\text{س})\ \text{ءس} =$

13) $\int_{1}^{2} (\text{س}^{-2} + \text{س}^{-3} + \text{س}^{-4})\ \text{ءس} =$

14) $\int_{5}^{1} (\text{س}^{3} + \text{س}^{5} + \text{س}^{2} + 3)\ \text{ءس} =$

15) $\int_{1}^{4} \frac{1}{\text{س}}\ \text{ءس} =$

16) $\int_{1}^{2} \frac{1}{\text{هـ}}\ \text{ءس} =$

17) $\int_{1}^{6} \frac{2}{\text{س}}\ \text{ءس} =$

١٧) $\int_{1}^{6} \frac{2}{س} \, دس =$

١٨) $\int_{-2}^{ن} 4 هـ^{س} \, دس =$

١٩) $\int_{1}^{8} \frac{1}{س^{\frac{4}{3}}} \, دس =$

٢٠) إذا كان $\int_{0}^{جـ} س \, دس = 8$ ، فما قيمة جـ .

٢١) إذا كان $\int_{-2}^{ب} 8 \, دس = 24$ ، فما قيمة ب .

٢٢) إذا كان $\int_{1}^{5} ل \, دس = -48$ ، فما قيمة ل .

٢٣) إذا كان $\int_{3}^{جـ} 3س^{2} \, دس = -35$ ، فما قيمة جـ .

٢٤) إذا كان $\int_{1}^{م+1} 2 \, دس = 9$ ، فما قيمة م .

٢٥) إذا كان $\int_{1}^{جـ} 0.5 \, دس = \int_{2}^{3} 0.7 \, دس$ ، فما قيمة جـ .

٢٦) إذا كان $\int_{-م}^{م} س^{2} \, دس = 18$ ، فما قيمة م .

٢٧) إذا كان $\int_{جـ}^{2} (4س - 1) \, دس = -2جـ$ ، فما قيمة جـ .

٢٨) $\int_{0}^{3} (جـ س^{2} - 9) \, دس = -15$ ، فما قيمة جـ .

٢٩) $\int_{1}^{ن} (2س + 2) \, دس = جـ$ ، فما قيمة ن .

اشتقاق التكامل المحدود

إذا كان ص = $\int_{أ}^{ب}$ ق(س) دس فإن

$\frac{دص}{دس}$ = صفر

مثال: أوجد $\frac{دص}{دس}$ لكل مما يأتي:

1) ص = $\int_{1}^{5} \sqrt{س^2 + 8}$ دس

2) ص = $\int \frac{س^5}{س^2+7}$ دس + $\int_{2}^{5} \frac{7س^2+1}{س^5+3}$ دس

3) ص = $\int \frac{س-1}{س+2}$ دس + $\int_{1}^{3} \frac{5س}{س^2+1}$ دس + $\int$ هـ(س) دس

جد $\frac{دص}{دس} \Big|_{س=2}$ علماً بأن هـ(2) = 7 ، هـ'(2) = 5

4) ص = $\int \frac{س^4+3}{س^3-2س}$ دس

5) ص = ($\int^{3} \sqrt{2س^3+5}$ + $\int_{3}^{4} \sqrt{2س^3+5}$) دس

ملاحظة:

$\int_{أ}^{ب}$ ق'(س) دس = ق(س) $\Big|_{أ}^{ب}$ = ق(ب) − ق(أ)

مثال: إذا كانت ق'(س) هي مشتقة الاقتران ق(س) المعرف على [2، 7] حيث ق(2) = 11 ، ق(7) = 25

جد $\int_{2}^{7}$ ق'(س) دس.

الحل:

مثال: إذا كانت ق(س) = 3س² + 5س ، المعرف على [1، 3] ، فجد $\int_{1}^{3}$ ق'(س) دس.

الحل:

مثال: إذا كانت هـَ(س) = ٦س هي مشتقة الاقتران هـ(س) المعرف في الفترة [-٢، ٣]، جد هـ(٣) - هـ(-٢)

الحل:

مثال: إذا كان ق(-٢) = ١٥، ق(-١) = ٨

فجد $\int_{-٢}^{-١}$ قَ(س) دس.

الحل:

مثال: إذا كانت قَ(س) هي مشتقة الاقتران ق المعرف على [٢، ٣]، وكان ق(٢) = ٤، ق(٣) = ٦

فجد قيمة $\int_{٢}^{٣}$ قَ(س) دس.

الحل:

خواص التكامل المحدود

*** الخاصية الأولى: "الخاصية الخطية"**

١) $\int_{أ}^{ب}$ جـ × ق(س) دس = جـ × $\int_{أ}^{ب}$ ق(س) دس.

٢) $\int_{أ}^{ب}$ (ق(س) ± هـ(س)) دس = $\int_{أ}^{ب}$ ق(س) دس ± $\int_{أ}^{ب}$ هـ(س) دس

مثال: جد قيمة كل من التكاملات التالية:

١) $\int_{٢}^{٥} \frac{-٧}{س}$ دس =

٢) $\int_{٠}^{١}$ (٤س^{٣} - ٢ $\sqrt{س}$) دس =

٣) $\int_{-١}^{٨} \sqrt[٣]{س^{٢}}$ دس =

٤) $\int_{١}^{٣}$ (٤ هـ^{س} + $\frac{٣}{س}$ - ٢) دس =

٥) $\int_{٠}^{١}$ (٣ $\sqrt{س}$ - ٤ $\sqrt[٣]{س}$) دس =

٦) $\int_{1}^{3}$ (س^{2} − ٤س + ٣) ءس =

٧) $\int_{-2}^{2}$ (٦س^{2} − ٨س + ٣) ءس =

* الخاصية الثانية : " خاصية قلب الحدود "

$\int_{a}^{b}$ ق(س) ءس = − $\int_{b}^{a}$ ق(س) ءس .

مثال : إذا كان $\int_{1}^{2}$ (٣س^{2} + ١) ءس = ١٢

فجد قيمة $\int_{2}^{1}$ (٣س^{2} + ١) ءس =

مثال : إذا كان $\int_{3}^{5}$ ٢ق(س) ءس = ١٢ .

جد قيمة $\int_{5}^{3}$ ق(س) ءس .

مثال : إذا كان $\int_{2}^{4}$ ق(س) ءس = −١٥

جد قيمة $\int_{4}^{2}$ ق(س) ءس .

مثال : إذا كان $\int_{7}^{4}$ ق(س) ءس = −٨

جد قيمة $\int_{4}^{7}$ (٢ق(س) − ٢س + ١) ءس

* الخاصية الثالثة : " خاصية الإضافة "

$\int_{a}^{b}$ ق(س) ءس + $\int_{b}^{c}$ ق(س) ءس = $\int_{a}^{c}$ ق(س) ءس .

مثال : إذا كان $\int_{-1}^{2}$ ق(س) ءس = ١٦ ،

$\int_{2}^{3}$ ق(س) ءس = −٨ ، جد $\int_{-1}^{3}$ ق(س) ءس

مثال : $\int_{-2}^{1}$ ق(س) ءس = ٩ ، $\int_{-2}^{2}$ ق(س) ءس = ١٨

جد $\int_{1}^{2}$ ق(س) ءس .

مثال : $\int_{1}^{4}$ ق(س) ءس = ٥ ، $\int_{4}^{7}$ ق(س) ءس = −٨

جد $\int_{1}^{7}$ ق(س) ءس .

مثال: $\int_{1}^{-1} ق(س)\,دس = 3$ ، $\int_{2}^{-1} ق(س)\,دس = -4$

جد قيمة $\int_{1}^{2} ق(س)\,دس$.

مثال: $\int_{1}^{3} ق(س)\,دس = 6$ ، $\int_{5}^{3} ق(س)\,دس = -4$

جد قيمة $\int_{1}^{5} ق(س)\,دس$.

مثال: $\int_{2}^{1} 3ق(س)\,دس = -12$ ، $\int_{3}^{1} ق(س)\,دس = -8$

جد قيمة $\int_{2}^{3} ق(س)\,دس$.

مثال: إذا كان

$$ق(س) = \begin{cases} 4س - 2 ، & -1 \le س \le 2 \\ 3س^{2} - 6 ، & 2 < س \le 3 \end{cases}$$

جد قيمة $\int_{-1}^{3} ق(س)\,دس$.

مثال: $$ق(س) = \begin{cases} س^{3} - 2س ، & 0 \le س \le 1 \\ 3 - 4س ، & 1 < س \le 2 \end{cases}$$

جد $\int_{0}^{2} ق(س)\,دس$.

مثال: $$ق(س) = \begin{cases} س^{2} + 1 ، & 1 \le س \le 3 \\ 2س + 4 ، & 3 < س \le 5 \end{cases}$$

جد $\int_{1}^{5} ق(س)\,دس$.

* الخاصية الرابعة:

$$\int_{أ}^{أ} ق(س)\,دس = صفر$$

مثال: جد قيمة التكاملات التالية:

1) $\int_{2}^{2} (س^{3} - 6س + 8)\,دس =$

2) $\int_{3}^{3} (7س - س^{5} + \frac{4}{س^{2}})\,دس =$

3) $\int_{ب}^{ب} (5س^{2} - 2س + 9)\,دس =$

4) $\int_{جـ}^{جـ} (س^{2} + س)\,دس =$

* أمثلة متنوعة على الخصائص السابقة

1) إذا كان $\int_{-1}^{3} \text{ق(س)}\,\text{دس} = 6$ ،

$\int_{3}^{-1} \frac{\text{ع(س)}}{2}\,\text{دس} = -5$ ، جد :

أ) $\int_{-1}^{3} \left(4\,\text{ق(س)} - \text{ع(س)} \right) \text{دس}$

ب) $\int_{-1}^{3} \left(9\text{س}^2 - 3\,\text{ع(س)} + 2 \right) \text{دس}$

2) إذا كان $\int_{-1}^{2} \left(2\,\text{ق(س)} - 1 \right) \text{دس} = 8$

جد قيمة $\int_{-1}^{2} \text{ق(س)}\,\text{دس}$.

3) إذا كان $\int_{8}^{3} \text{ق(س)}\,\text{دس} = -8$. جد قيمة

أ) $\int_{3}^{8} \left(2\,\text{ق(س)} + 3\text{س} + 4 \right) \text{دس}$

ب) $\int_{1}^{8} \text{ق(س)}\,\text{دس} - \int_{1}^{2} \text{ق(س)}\,\text{دس}$.

4) إذا علمت أن $\int_{1}^{2} \left(2\,\text{ق(س)} - 2 \right) \text{دس} = 8$

$\int_{4}^{2} \text{ق(س)}\,\text{دس} = -12$ ، جد قيمة :

أ) $\int_{-1}^{2} \text{ق(س)}\,\text{دس}$.

ب) $\int_{4}^{-1} \left(\frac{\text{ق(س)}}{2} + 3\text{س}^2 \right) \text{دس}$.

5) إذا علمت أن $\int_{1}^{3} \text{ق(س)}\,\text{دس} = 8$ ،

$\int_{1}^{5} \left(\text{ق(س)} - 2 \right) \text{دس} = 3$ ، جد قيمة

$\int_{3}^{5} \text{ق(س)}\,\text{دس} =$

٦) إذا كان $\int_{2}^{أ}$ ٢س ءس = ... ، ما قيمة أ ؟

٧) إذا كان $\int_{2}^{هـ}$ ٨س٣ ءس = ... ، ما قيمة هـ ؟

٨) إذا كان $\int_{2}^{ل}$ ٩س٢ ءس = ٢١ ، ما قيمة ل ؟

٩) إذا كان $\int_{1}^{ب}$ (٢س − ٤) ءس = ١٥ ، ما قيمة ب ؟

١٠) عبّر عن التكاملات التالية بتكامل واحد على الصورة $\int_{أ}^{ب}$ ق(س) ءس .

أ) $\int_{7}^{9}$ ق(س) ءس + $\int_{2}^{7}$ ق(س) ءس =

ب) $\int_{2}^{6}$ ق(س) ءس − $\int_{2}^{5}$ ق(س) ءس =

جـ) $\int_{1}^{3}$ ق(س) ءس + $\int_{5}^{1}$ ق(س) ءس =

* التكامل بالتعويض

- مؤشرات التكامل بالتعويض

١) تكامل حاصل ضرب اقترانين .
٢) تكامل قسمة اقتران على آخر " مشتقة البسط "

- خطوات التكامل بالتعويض

١) نفرض ص = ما في داخل القوس / مقدار داخل
- ما بداخل القوة
- الزاوية في الاقتران الدائري
- المعادلة مرفوعة

٢) نشتق ٣) نبدل
٤) نغيّر الحدود (في التكامل المحدود)

مثال : جد كلاً من التكاملات التالية .

١) $\int$ ٢س (س٢ + ١)٧ ءس .

٢) $\int$ (س٢ + س)(أ س٣ + س٢ + ٤)٥ ءس .

نضال شلـــباية

٣) $\int ٣س^٢(س^٣+٤)^٥ \, ءس$

٤) $\int (٢س-٣)^{-٦} \, ءس$

٥) $\int (٢س+١)(\sqrt{س^٢+س+٤}) \, ءس$

٦) $\int س(٣س^٢+٢)^٤ \, ءس$

٧) $\int \sqrt{(٥-٢س)^٣} \, ءس$

٨) $\int (س+٣)(\sqrt[٣]{س^٢+٦س-٤}) \, ءس$

٩) $\int (\text{١} - \text{س})^{\text{٣}} \, \text{ءس}$

١٠) $\int \frac{\text{١٠س} - \text{٥}}{(\text{س}^{\text{٢}} - \text{س} + \text{٥})^{\text{٣}}} \, \text{ءس}$

١١) $\int \frac{\text{٤س} - \text{٦}}{\sqrt{\text{س}^{\text{٢}} - \text{٣س} + \text{١}}} \, \text{ءس}$

١٢) $\int \frac{\text{٦س} + \text{١}}{\sqrt{\text{س}^{\text{٢}} + \text{٢س} + \text{٥}}} \, \text{ءس}$

١٣) $\int \frac{\text{٦س}^{\text{٢}}}{\sqrt[\text{٤}]{\text{س}^{\text{٣}} + \text{٧}}} \, \text{ءس}$

١٤) $\int \frac{\text{١٨}}{(\text{٢س} + \text{١})^{-\text{٢}}} \, \text{ءس}$

١٥) $\int \text{جتا}(٢س+٦)\, \text{د}س$

١٦) $\int ٢س\, \text{جا}(س^{٢}-٣)\, \text{د}س$

١٧) $\int \text{جا}(٣-٤س)\, \text{د}س$

١٨) $\int \text{قا}^{٢}(٥س-٨)\, \text{د}س$

١٩) $\int ٢\, \text{جا}(٣س-١١)\, \text{د}س$

٢٠) $\int (س+١)\, \text{قا}^{٢}(س^{٢}+٢س+١)\, \text{د}س$

نضال شلـــباية

٢٧) $\int ٤س\, هـ^{س^٢}\, دس$

٢٨) $\int هـ^{٦س-١}\, دس$

٢) $\int_{-١}^{٢} (٤س-١)\left(\sqrt{٢س^٢-س-٢}\right) دس$

٣) $\int_{٢}^{٥} هـ^{(س-٢)}\, دس$

* التكامل بالتعويض «التكامل المحدود»

١) $\int_{٢}^{٣} ٣(٣س-٦)^{٣}\, دس$

٢١) $\int \frac{٣}{٣\text{س} - ١} \, \text{ءس}$

٢٢) $\int \frac{-٢}{٣ - ٢\text{س}} \, \text{ءس}$

٢٣) $\int \frac{١}{\text{س}} \, \text{لو}_{\text{هـ}} \text{س} \, \text{ءس}$

٢٤) $\int ٥ \, \text{هـ}^{٥\text{س}} \, \text{ءس}$

٢٥) $\int \text{س} \, \text{هـ}^{٣\text{س}} \, \text{ءس}$

٢٦) $\int \text{س}^{٢} \, \text{هـ}^{٤\text{س}^{٣} - ٧} \, \text{ءس}$

٤) $\int_{1}^{2} \frac{س + ١}{(س^{٢} + ٢س + ١)^{٢}} \, ءس$

٥) $\int_{1}^{3} \frac{٢}{س + ٢} \, ءس$

٦) $\int_{1}^{4} ٢ \, هـ^{٢س - ١} \, ءس$

٧) $\int_{2}^{6} \frac{-٢}{\sqrt{٣س + ٦}} \, ءس$

نضال شلـــباية

8) $\int_{1}^{3} \frac{2}{1+2س} \, ء س$

9) $\int_{0}^{1} س \, هـ^{س^2} \, ء س$

10) $\int_{1}^{8} \sqrt[3]{9-س} \, ء س$

11) $\int_{-2}^{2} (س^3+5)^8 (س^2) \, ء س$

12) $\int_{1}^{2} \frac{ء س}{(3+2س)^2}$

13) $\int_{3}^{4} س (25-س^2)^{-\frac{1}{2}} \, ء س$

١٤) إذا كان ميل المماس لمنحنى الاقتران ق عند النقطة (س، ص) يساوي $(٤س - ٢)^{٣}$. فاكتب قاعدة الاقتران ق علمًا بأنه يمر بالنقطة (١، ٨).

١٥) إذا علمت أن ق(٤) = ١٢ ، ق(١) = −٨
احسب قيمة $\int_{١}^{٢} ٢س\, ق'(س^{٢})\, دس$.

١٦) يتحرك جسيم على خط مستقيم بحيث أن سرعته بعد (ن) ثانية تعطى بالعلاقة
$ع(ن) = ٣(ن + ١)^{٢}$ م/ث
جد المسافة التي يقطعها الجسيم بعد ثانيتين من بدء الحركة علمًا أن موقعه الابتدائي ف(٠) = ٢م
الحل: -

تطبيقات التكامل: إيجاد المساحات .

* **الحالة الأولى :-**

المساحة المحصورة بين منحنى الاقتران (ق) ومحور السينات في الفترة [أ ، ب] .

قاعدة

المساحة = م = $\left| \int_{أ}^{ب} ق(س) \, دس \right|$

مثال: أوجد مساحة المنطقة المغلقة المحصورة بين منحنى الاقتران (ق) ومحور السينات والمستقيمين المذكورين إزاء كل منها في كل مما يلي :-

١) ق(س) = ٢س + ٢ ، س = ١ ، س = ٣

٢) ق(س) = ٤ - ٢س ، في الفترة [-١ ، ٣]

٣) ق(س) = ٣س^٢ ، في الفترة [١ ، ٢]

٤) ق(س) = ٣س^٢ + ٢ ، ومحوري السينات والصادات والمستقيم س = ٢ .

* الحالة الثانية :

المساحة المحصورة بين منحنى ق(س) ومحور السينات

- نجد نقاط تقاطع منحنى (ق) مع محور السينات

بحل ق(س) = .

$$م = \left| \int_{أ}^{ب} ق(س) \, دس \right|$$

مثال : احسب مساحة المنطقة المغلقة المحصورة بين كل من المنحنيات الاقترانات التالية ومحور السينات .

1) ق(س) = ٩ - س^٢

2) ق(س) = ٦س - ٣س^٢

3) ق(س) = س^٢ - ٤س .

4) ق(س) = س^٢ + ٢س - ٣

نضال شلـــبابة

5) ق(س) = $س^2 - 25$

6) ق(س) = $س - س^3$

* الحالة الثالثة :

المساحة المحصورة بين اقترانين ق(س) ، هـ(س)

- نجد حدود التكامل من خلال مساواة الاقترانين معاً وذلك لتحديد حدود المساحة .

$$م = \left| \int_{أ}^{ب} \left(\overset{\text{الأعلى}}{ق(س)} - \overset{\text{الأدنى}}{هـ(س)} \right) دس \right|$$

مثال: جد مساحة المنطقة المغلقة المحصورة بين كل من الاقترانين المذكورين فيما يلي :

1) ق(س) = 6س ، هـ(س) = $3س^2$

نضال شلـــبايه

٦) ق(س) = ١٦ − ٤س^2 ، والمستقيم ص = ٠

٧) ص = س^2 + ٢ ، ص = ٥ − ٢س

٨) أوجد المساحة المحصورة بين منحنى الاقترانين
ص = س = ٦ ، ص = س^2

٩) احسب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيي
الاقترانين ق(س) = س^2 + س ، والمستقيم
ص − س = ١

نضال شلـــباية

٢) ق(س) = ٢س − ٣ ، هـ(س) = س² − ٢س

٤) ق(س) = س² + ٢ ، والمستقيم ص = ٣

٣) ق(س) = س² ، هـ(س) = ٢س

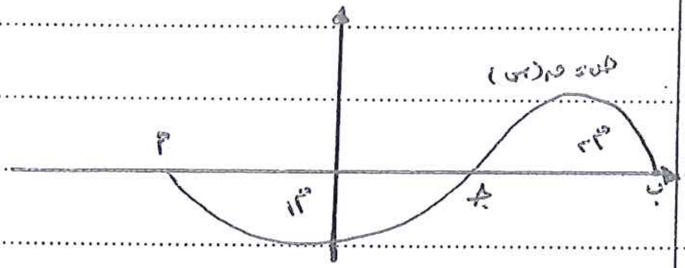
٥) ق(س) = س² − ٤س ، والمستقيم ص = ٥

نضال شلـــباية

أسئلة الرسومات

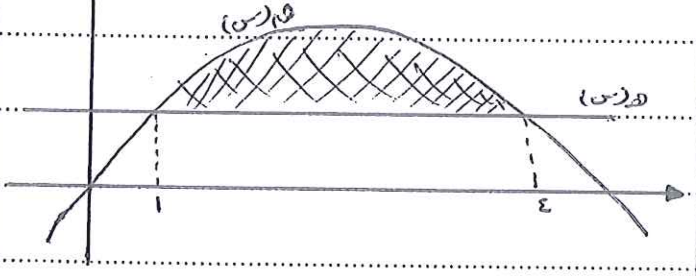
١) احسب مساحة المنطقة المحصورة بين $ق(س) = \frac{1}{4} س^{3}$ ، $هـ(س) = س$.

١) يمثل الشكل التالي المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران ومحور السينات في الفترة [أ ، ب]، فإذا كانت مساحة م٢ = ٨ وحدات مربعة، ومساحة م١ = ٥ وحدات مربعة، احسب $\int_{أ}^{ب} ق(س) \, دس$.



٢) في الشكل التالي، إذا علمت أن $\int_{1}^{4} ق(س) \, دس = 8$ ، $\int_{1}^{4} هـ(س) \, دس = 3$

أوجد مساحة المنطقة المظللة.



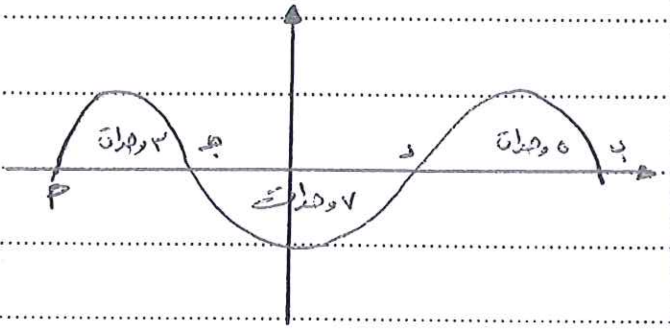
٣) الشكل المجاور يمثل منحنى ق(س) والمساحة المحصورة بين ق(س) ومحور السينات خلال الفترة [أ، ب]. أجب

أ) $\int_{أ}^{جـ}$ ق(س) دس =

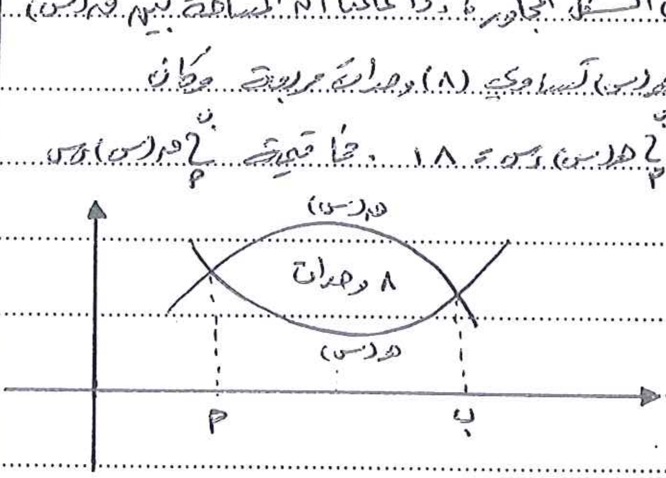
ب) $\int_{أ}^{د}$ ق(س) دس =

جـ) المســاحة بين ق(س) ومحور السينات في [أ، د]

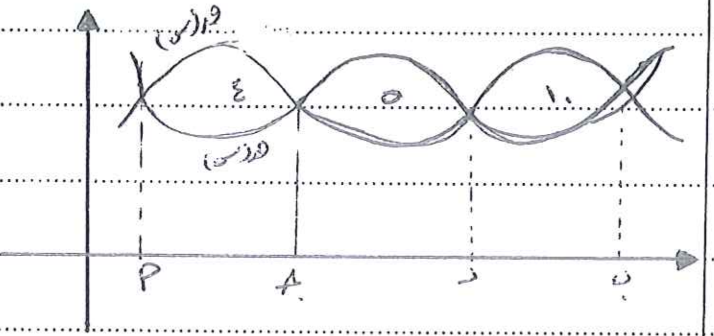
د) المســاحة بين ق(س) ومحور السينات في [أ، ب]



٤) في الشكل المجاور، إذا علمت أن المساحة بين ق(س) هـ(س) تساوي (٨) وحدات مربعة، وكان $\int_{أ}^{ب}$ هـ(س) دس = ١٨، جد قيمة $\int_{أ}^{ب}$ ق(س) دس



٥) الشكل المجاور يمثل منحنيي ق(س)، هـ(س) والمساحة المحصورة بينهما في الفترة [أ، ب]



أ) المساحة بين ق(س)، هـ(س) في الفترة [أ، جـ]

ب) المساحة بين ق(س)، هـ(س) في الفترة [جـ، د]

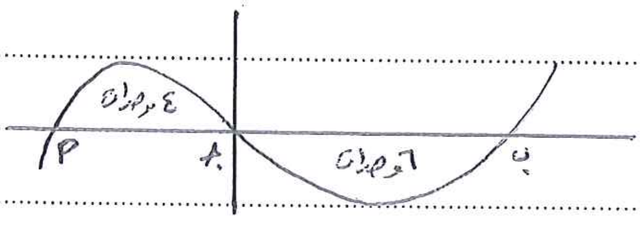
جـ) المساحة بين ق(س)، هـ(س) في الفترة [أ، ب]

٦) يمثل الشكل المجاور منحنى ق(س) وقيم المساحات المحصورة بين ق(س) ومحور السينات: أوجد

أ) $\int_{جـ}^{ب}$ ق(س) دس =

ب) $\int_{أ}^{ب}$ ق(س) دس =

جـ) المســاحة المحصورة بين منحنى ق(س) ومحور السينات في الفترة [أ، ب] =



نضال شلـــباية

تطبيقات إقتصادية

أولاً : الإيراد الكلي

د(س) = ∫ دَ(س) دس

مثال : إذا كان اقتران الإيراد الحدي د(س) من الوحدات التي ينتجها مصنع هو :

دَ(س) = س^2 − ٤س + ٨ .

جد الإيراد الكلي الناتج عن بيع هذه الوحدات .

الحل :

مثال : إذا كان اقتران الإيراد الحدي لبيع (س) لعبة من لعب الأطفال التي ينتجها مصنع هو

دَ(س) = ٣س^2 − ٨س + ٢ دينارا

جد الإيراد الكلي الناتج عن بيع هذه اللعب .

الحل :

مثال : إذا كان اقتران الإيراد الحدي لبيع (س) من أجهزة الحاسوب يرتبط بالاقتران

دَ(س) = س^2 − ٢س + ٧ .

جد الإيراد الكلي الناتج عن بيع (٦) أجهزة .

الحل :

مثال : إذا كان اقتران الإيراد الحدي لبيع (س) من الحقائب هو دَ(س) = ٣س^2 − ٤س + ٢٥ دينار

جد الإيراد الكلي الناتج عن بيع (٧) حقائب

الحل :

مثال : إذا كان اقتران الإيراد الحدي لبيع (س) ثلاجة هو دَ(س) = س^2 − ١٢س + ٢٥٠ دينار

جد الإيراد الكلي الناتج عن بيع هذه الثلاجات .

الحل :

ثانياً: فائض المستهلك وفائض المنتج

أ) فائض المستهلك (فا ك)

$$ف\ا ك = \int_{0}^{س_1} د(س)\, ءس - ع_1 \times س_1$$

حيث:

د(س): إقتران السعر - الطلب

$ع_1$: سعر التوازن

$س_1$: كمية التوازن

ب) فائض المنتج (فا ج)

$$فا ج = ع_1 \times س_1 - \int_{0}^{س_1} هـ(س)\, ءس$$

حيث:

هـ(س): إقتران السعر - العرض

$ع_1$: سعر التوازن

$س_1$: كمية التوازن.

مثال: إذا كان ع = د(س) = ٧٠ - ٤س يمثل إقتران (السعر - الطلب) حيث ع: السعر بالدينار، س: عدد الوحدات المنتجة. وكان السعر الثابت عند $ع_1$ = ١٠. جد قيمة فائض المستهلك.

الحل:

مثال: إذا كانت ع = د(س) = ٣٦ - $\frac{س^2}{4}$ يمثل إقتران السعر - الطلب. وكان السعر الثابت عند $ع_1$ = ١٢ جد فائض المستهلك.

الحل:

مثال: إذا كان ع = هـ(س) = ١٨ + ٤س يمثل إقتران السعر - العرض حيث ع السعر بالدينار س عدد الوحدات. والسعر الثابت عند $ع_1$ = ٣٠ ديناراً جد فائض المنتج.

الحل:

مثال: إذا كان ع = هـ(س) = ٥ + ٢س² حيث (ع) السعر بالدينار. والسعر الثابت عند $ع_1$ = ٥٣ دينار. جد فائض المنتج.

الحل:

مثال: جد فائض المستهلك لمنحنيات (السعر-الطلب) التالية عند السعر المثبت إزاء كل منها:

أ) ع = د(س) = ٣ - $\frac{س}{٨}$ ، ع١ = ١

ب) ع = ٥٠ - س ، ع١ = ٣٠

جـ) ع = ٢٥ - ٣س ، ع١ = ٧

د) ع = ٩ - $\frac{س}{٢}$ ، ع١ = ٣

مثال: جد فائض المنتج لمنحنيات (السعر-العرض) التالية عند السعر المثبت إزاء كل منها:

أ) ع = هـ(س) = $\frac{٤}{٣}$س + ١٥ ، ع١ = ١٧

ب) ع = ٣س^{٢} + ٦ ، ع١ = ٤٥

جـ) ع = $\frac{س}{٢}$ + ٧ ، ع١ = ١٢

د) ع = ٢س^{٢} + ٣ ، ع١ = ٥٣

نضال شلباية

مثال: إذا كان اقتران (السعر-الطلب)

ق(س) = ٣٦ - ٢س ، واقتران (السعر-العرض)

هـ(س) = ١٢ + ٦س ، جد

أ) كمية التوازن

ب) سعر التوازن

جـ) فائض المستهلك عند سعر التوازن

د) فائض المنتج عند سعر التوازن

مثال: إذا كان اقتران (السعر-الطلب)

ق(س) = ٤٨ - ٣س ، وكان اقتران (السعر-العرض)

هـ(س) = ٢س + ١٣ ، جد

أ) كمية التوازن

ب) سعر التوازن

جـ) فائض المستهلك عند سعر التوازن

د) فائض المنتج عند سعر التوازن

مثال: إذا كان اقتران (السعر - الطلب) ع = ق(س) = ٤٣ - ٤س ، وكان اقتران (السعر - العرض) هو ع = هـ(س) = س + ٣

أ) كمية التوازن

ب) سعر التوازن

جـ) فائض المستهلك عند سعر التوازن

د) فائض المنتج عند سعر التوازن

مثال: إذا كان اقتران (السعر - الطلب) ق(س) = ٢٠ - س² واقتران (السعر - العرض) هـ(س) = س² + ٢ ، جد

أ) فائض المستهلك

ب) فائض المنتج

مثال: إذا كان اقتران (السعر - الطلب) ق(س) = ١٨ - س ، واقتران (السعر - العرض) هـ(س) = $\frac{س}{٢}$ ، جد:

أ) فائض المنتج

ب) فائض المستهلك

بسم الله الرحمن الرحيم

الوحدة : الثانية

الخالدفي :

الإحتمالات

نضال شلباية

إعداد المعلم : نضال شلباية

0799229642

أولاً: مبدأ العد العام

إذا أمكن إجراء عملية ما على مراحل متتابعة عددها (ك) وأجريت المرحلة الأولى بطرق عددها (ن١) والمرحلة الثانية بطرق عددها (ن٢) وهكذا فإنه يمكن إجراء هذه العملية بطرق عددها (ن١ × ن٢ × ن٣ × ... × نك)

مثال١: دخل شخص مطعماً لتناول وجبة الغذاء فوجد أن قائمة الطعام لذلك اليوم تحتوي ثلاثة أنواع من الشوربة ونوعين من السمك. فبكم طريقة يمكن اختيار وجبة مكونة من نوع واحد من الشوربة ونوع آخر من السمك؟

الحل:

مثال٢: كم عدداً مكوناً من منزلتين يمكن تكوينه من مجموعة الأرقام {٥، ٦، ٧، ٩}

أ) إذا سمح بتكرار الأرقام

ب) إذا لم يسمح بتكرار الأرقام

مثال٣: إذا كان عدد المعلمين في إحدى المدارس (٥٠) معلماً. بكم طريقة يمكن تكوين لجنة ثلاثية مؤلفة من رئيس وأمين سر وأمين صندوق؟

الحل:

مثال٤: أراد شخص السفر من العقبة إلى دمشق مروراً بعمان علماً بأن بإمكانه السفر من العقبة إلى عمان بواسطة (السيارة، الطائرة) وبإمكانه السفر من عمان إلى دمشق بواسطة (الطائرة، السيارة، القطار). فبكم طريقة أمامه للسفر من العقبة إلى دمشق مروراً بعمان؟

الحل:

مثال٥: أراد أحد الطلبة شراء قلم ومسطرة ودفتر من بين (٣) أنواع مختلفة من الأقلام ونوعين من المساطر و(٤) أنواع من الدفاتر. فبكم طريقة يمكن للطالب شراء قلم ومسطرة ودفتر؟

الحل:

مثال: كم طريقة يمكن بها الإجابة عن (٥) أسئلة من نوع صح أو خطأ؟

الحل:

مثال: يتكون مجلس إدارة شركة من (٧) أعضاء كم طريقة يمكن اختيار رئيس ونائب للرئيس من بين أعضاء مجلس الشركة؟

الحل:

مثال: دخل أحد الزبائن محلاً لبيع أجهزة الحاسوب فوجد أمامه (٤) أنواع مختلفة من شاشات العرض و(٥) أنواع للوحات المفاتيح و(٦) أنواع لوحدات التشغيل. فبكم طريقة يمكنه اختيار جهاز مكون من شاشة ولوحة المفاتيح ووحدة التشغيل؟

الحل:

مثال: أرادت دائرة السير صنع لوحات مرورية تحمل كل منها حرفاً من حروف الهجاء العربية متبوعاً بعدد من رقمين من مجموعة الأرقام {١، ٢، ٣، ...، ٩}. فكم لوحة مختلفة يمكن صنعها إذا علمت أن عدد حروف الهجاء العربية (٢٨) حرفاً؟

الحل:

مثال: يراد تكوين أعداد بحيث يتكون كل منها من (٣) منازل من الأرقام {٢، ٣، ٤، ٥، ٦} أوجد عدد الأعداد التي يمكن الحصول عليها عندما:

أ) يسمح بتكرار الرقم

ب) لا يسمح بتكرار الرقم.

مثال: بكم طريقة يمكن جلوس (٥) طلاب على (٨) مقاعد؟

الحل:

مثال: بكم طريقة يمكن لـ (٦) سيارات الوقوف في موقف سيارات يحتوي (٨) أماكن خالية إذا كانت الأماكن في خط مستقيم؟

الحل:

مثال: يحتوي صندوق على (١٠) كرات متماثلة. بكم طريقة يمكن سحب كرتين على التوالي:

أ) مع الإرجاع.

ب) بدون إرجاع

ثانياً: مضروب العدد الصحيح غير السالب

يرمز لمضروب العدد (ن) بـ (ن!) حيث

ن! = ن(ن-١)(ن-٢)×...×٣×٢×١

مثال١:
٢! =
٣! =
٤! =
٥! =
٦! =
٧! =

ملاحظات:

١) ٠! = ١
٢) ١! = ١
٣) ن! = ن(ن-١)!

مثال٢: ٥! = ٥×٤!
٧! =
١٠! =

٤) ن! = ن(ن-١)(ن-٢)!

مثال٣: ٦! = ٦×٥×٤!
٨! =
٤! =

مثال٤: جد قيمة كل مما يلي:

١) ٧! =
٢) (٥-٥)! =
٣) ٥!×٣! =
٤) (٥-٤)!×٤! =
٥) ٧! / ٥! =
٦) ٩! / (٥!×٦!) =
٧) ٨! - ٦! =
٨) (٦/٣)! =
٩) ١٥! / (٣×١٣!) =
١٠) (٣×٢)! =
١١) ٢!×٣! =
١٢) ٣! + ٢! =
١٣) (٣+٢)! =
١٤) ٨! / ٦! =
١٥) ٧! / (٧-٢)! =
١٦) ٦! / (٢!×٤!) =

مثال: أوجد قيمة (ن) في كل مما يلي: -

1) ٥ (ن!) = ٣٠

2) ن! = ٧٢٠

3) ٣ (ن!) = ٣٦٠

4) ن! - ٤! = ٩٦

مثال: أكتب الأعداد التالية باستخدام المضروب

1) ١٢٠ =

2) ٤٠٣٢٠ =

مثال: بكم طريقة يمكن أن يجلس (٥) طلاب على (٥) مقاعد في صف واحد؟

الحل:

مثال: بكم طريقة يمكن ترتيب (٦) كتب على رف مكتبة في صف واحد؟

الحل:

ثالثاً: التباديل

تستخدم التباديل عندما يكون الترتيب مهماً.

- تعني التباديل عدد التراتيب الممكنة.

قاعدة:

ل(ن، ر) = ن! / (ن - ر)!

ل(ن، ر) = ن (ن - ١)(ن - ٢) × ... × (ن - ر + ١)

مثال: جد قيم التباديل التالية: -

1) ل(٥، ٣) =

2) ل(٧، ٣) =

3) ل(١٠، ٤) =

٤) ل(١٠، ٦) =

٥) ل(٦، ٣) =

٦) ل(٩، ٣) =

٧) ل(٨، ٣) / !٣ =

٨) ل(٧، ٢) =

٩) ل(٦، ٤) =

* قواعد هامة :-

① ل(ن، ٠) = ١

② ل(ن، ١) = ن

③ ل(ن، ن) = ن!

④ ل(ن، ٢) = ن(ن − ١)

⑤ ل(ن، ٣) = ن(ن − ١)(ن − ٢)

مثال٤ : جد قيم التباديل التالية :-

١) ل(٩، ٠) =

٢) ل(٨، ٢) =

٣) ل(٦، ٠) =

٤) ل(٣٥، ٠) =

٥) ل(٧، ١) =

٦) ل(١٠، ١) =

٧) ل(٢٠، ١) =

٨) ل(٧، ٧) =

٩) ل(٥، ٥) =

١٠) ل(٩، ٩) =

١١) ل(١٥، ٢) =

١٢) ل(٦، ٢) =

مثال٣ : أوجد قيمة (ن) في كل مما يلي :-

١) ل(٦، ن) = ١٢٠

٣) ٣ل(٦، ن) = ٩٠

٢) ل(ن، ٢) = ٥٦

٤) ل(ن، ٣) = ٩ ل(ن، ٢)

نضال شلباية

٥) ل(ن،٢) = ٤٢

٦) ل(ن،٢) = ٣٠

* الأسئلة التالية على التباديل :

تستخدم التباديل في المسائل العملية التي يكون فيها الترتيب مهماً ، وتحتوي على أحد الكلمات التالية (ترتيب ، تبديل ، مختلف ، تخصص في المهنة ، كل على التوالي بدون إرجاع)

مثال : بكم طريقة يمكن اختيار لجنة مكونة من رئيس ونائب الرئيس وأمين الصندوق من بين أعضاء مجلس إدارة عددهم (٦) .

الحل :

مثال : كم عدد تباديل مجموعة من ستة عناصر مأخوذة ثلاثة عناصر كل مرة .

الحل :

مثال٣ : كم كلمة مكونة من ثلاثة حروف يمكن تكوينها من مجموعة الأحرف {م، ب، د، و، ع} علماً بأنه ليس ضرورياً أن يكون للكلمة معنى ؟

الحل :

مثال٤ : بكم طريقة يمكن اختيار مديرة ومساعدة مديرة وسكرتيرة ومحاسبة وفنية مختبر من بين (١٠) معلمات .

الحل :

مثال : كم كلمة مكونة من ثلاثة حروف مختلفة يمكن تكوينها من حروف كلمة (فلسطين) .

الحل :

مثال : ما عدد طرق جلوس (٥) أطفال على (٧) مقاعد موضوعة في خط مستقيم ؟

الحل :

مثال: صندوق يحتوي على (٥) كرات حمراء و (٤) كرات بيضاء، يراد سحب (٣) كرات على التوالي وبدون إرجاع. فبكم طريقة يمكن عمل ذلك؟

الحل

رابعًا: التوافيق

كل مجموعة جزئية عدد عناصرها (ر) يتم اختيارها من مجموعة عدد عناصرها (ن) تسمى توفيقًا مكونًا من (ر) عنصرًا ويرمز لعدد هذه التوافيق بالرمز $\binom{ن}{ر}$ وتقرأ (ن) فوق (ر) حيث:

① $\binom{ن}{ر} = \frac{ل(ن،ر)}{ر!}$ ، ∵ ر ≤ ن

② $\binom{ن}{ر} = \frac{ن!}{ر!(ن-ر)!}$

مثال: أوجد قيم التوافيق الآتية :-

1) $\binom{٦}{٤} =$

2) $\binom{٨}{٥} =$

3) $\binom{٥}{٤} =$

4) $\binom{٧}{٣} =$

5) $\binom{١٠}{٦} =$

6) $\binom{٥}{٢} \times \binom{٥}{٣} =$

7) $\binom{٧}{٤} =$

8) $\binom{٥}{٢} =$

* نتائج هامة :

① $\binom{ن}{٠} = ١$ ③ $\binom{ن}{ن} = ١$

② $\binom{ن}{١} = ن$

④ $\binom{ن}{ر} = \binom{ن}{م}$ عندها

ر = م أو ر + م = ن

مثال: أوجد قيم التوافيق التالية :

1) $\binom{٩}{٠} =$

2) $\binom{٥}{٠} =$

3) $\binom{٧}{١} =$

4) $\binom{٨}{٨} =$

5) $\binom{٣}{٣} =$

6) $\binom{٩}{٢} =$

7) $\binom{٩}{٧} =$

8) $\binom{٨}{٣} =$

9) $\binom{٨}{٥} =$

١٠) $\binom{٦}{٤} \times \binom{٦}{٢} =$

١١) $\binom{٥}{٢} \times \binom{٥}{٢} =$

مثال ٣: حل المعادلات التالية :-

١) $\binom{١٢}{ن} = \binom{١٢}{٥}$

٢) $\binom{ن}{٥} = \binom{ن}{٨}$

٣) $\binom{٩}{ن} = \binom{٩}{٥}$

٤) $\binom{ن}{٣} = \binom{ن}{٩}$

٥) $\binom{ن}{٣} = \binom{ن}{٧}$

٦) $\binom{٨}{ن} = \binom{٨}{٦}$

٧) $\binom{١٠}{٢ن} = \binom{١٠}{ن+١}$

٨) $\binom{١٢}{٢ن+٥} = \binom{١٢}{ن+١}$

٩) $\binom{ن}{٢} = ٢٨$

* الأسئلة المقالية على التوافيق

تستخدم التوافيق عندما يكون الترتيب مهماً مثل :-

أ) اختيار عينة من مجموعة بدون تحديد الطريقة.

ب) اختيار عينة عشوائياً.

جـ) اختيار عينة دفعة واحدة.

مثال : ما عدد الطرق التي يمكن بها إجراء مباريات تصفية نهائية لكرة الطاولة بين ستة لاعبين؟

الحل :

نضال شلـــباية

مثال: بكم طريقة يمكن إجراء مباريات التصفية النهائية لكرة القدم بين خمسة فرق رياضية؟

مثال ٣: بكم طريقة يمكن اختيار (٣) معلمين وطالبين من بين (٧) معلمين و (١٠) طلاب.

مثال ٤: مجموعة مكونة من (٨) معلمين و (٥) إداريين جد عدد الطرق التي يمكن بها تكوين لجنة ثلاثية منهم في كل من الحالات التالية:

أ) تتكون اللجنة من معلمين وإداري.

ب) تتكون اللجنة من معلمين على الأقل.

جـ) رئيس اللجنة ونائبه من الإداريين والباقي من المعلمين.

مثال: ما عدد الطرق الممكنة لاختيار (٥) أسئلة للإجابة عنها في امتحان للرياضيات يتكون من (٧) أسئلة؟

مثال ٦: ما عدد المجموعات الجزئية التي تتكون من (٤) عناصر والتي يمكن تكوينها من مجموعة تتكون من (٦) عناصر.

مثال ٧: ما عدد طرق اختيار كرتين من صندوق يحتوي على (٧) كرات؟

مثال: بكم طريقة يمكن تشكيل لجنة من (٤) طلاب على الأقل من بين (٨) طلاب؟

سؤال ٩: جد عدد الطرق لاختيار (٣) كتب على الأكثر من بين (٧) كتب مختلفة ؟

سؤال ١٠: بكم طريقة يمكن اختيار كرتين على الأكثر من صندوق يحتوي على (٦) كرات متماثلة ؟

سؤال ١١: صندوق يحتوي على (٥) كرات بيضاء و (٣) كرات حمراء بكم طريقة يمكن اختيار كرتين دفعة واحدة .

سؤال ١٢: عدد أعضاء مجلس إدارة شركة (١٠) أعضاء من ضمنهم (٤) نساء .

أ) كم طريقة يمكن بها اختيار (٣) من الأعضاء ليشكلوا فريقاً ؟

ب) كم طريقة يمكن بها اختيار (٣) أعضاء على أن يكون بينهم امرأة واحدة .

سؤال ١٣: مجلس إدارة إحدى الشركات يضم (٨) مساهمين و (٣) مدراء . جد عدد الطرق التي يمكن بها تكوين لجنة استشارية مؤلفة من (٤) أشخاص منهم في الحالات التالية :

أ) تتكون اللجنة من (٢) مساهمين و إداري .

ب) تتكون من (٢) مدير على الأقل .

جـ) رئيس اللجنة ونائبه من المساهمين والباقي من المدراء .

نضال شلباية

المتغير العشوائي (س)

تعريف: المتغير العشوائي هو اقتران معرف من الفضاء العيني (Ω) إلى مجموعة جزئية من مجموعة الأعداد الحقيقية وقاعدته صفة تعيين يحددها اهتمام التجربة ويستخدم الرموز (س، ص، ع، ...) للدلالة على المتغيرات العشوائية.

مثال: إذا دل المتغير العشوائي (س) على عدد الأطفال الإناث في تجربة اختيار عشوائية لعائلة لديها طفلان وتسجيل النتائج حسب الجنس وتسلسل الولادة. جد القيم الممكنة للمتغير العشوائي.

مثال٢: إذا دل المتغير العشوائي (س) على عدد مرات ظهور الصورة عند رمي قطعة نقود (٣) مرات. أكتب الفضاء العيني للتجربة ثم جد القيم الممكنة للمتغير العشوائي (س)

مثال٣: سحبت كرتان وفقاً من صندوق يحتوي على (٣) كرات حمراء وكرتين بيضاوين، إذا كان (س) هو عدد الكرات المسحوبة الحمراء. جد القيم الممكنة للمتغير العشوائي (س)؟

مثال٤: أختيرت عينة من (٣) ملفات ضريبية، إذا كان (س) متغيراً عشوائياً يعني عدد الملفات الصحيحة أكتب الفضاء العيني للتجربة ثم جد القيم الممكنة للمتغير العشوائي؟

* ملاحظة: إذا كانت مجموعة القيم التي يأخذها متغير عشوائي مجموعة معدودة فيسمى المتغير العشوائي متغيراً منفصلاً (كما في الأمثلة السابقة)

نضال شلـــباية

* التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي المنفصل

التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي المنفصل عبارة عن اقتران (ل) يربط جميع قيم المتغير العشوائي (س) بالاحتمالات المقابلة لها ويكتب على صورة جدول أو أزواج مرتبة.

مثال: في تجربة اختيار ثلاث علب من انتاج مصنع. إذا دل المتغير العشوائي (س) على عدد العلب الصالحة، اكتب التوزيع الاحتمالي.

الحل:

مثال: يحتوي صندوق على (٤) كرات بيضاء و(٦) كرات كرات، سحبت من الصندوق (٣) كرات على التوالي مع الإرجاع. إذا دل المتغير العشوائي (س) على عدد الكرات البيضاء المسحوبة كون جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي (س).

الحل:

تدريب: اكتب التوزيع الاحتمالي للأمثلة ١، ٢، ....

تعريف: يسمى ل(س) اقتران احتمال للمتغير العشوائي المنفصل (س) الذي يأخذ القيم $س_١، س_٢، ...، س_ن$ إذا كان:

١) ل($س_ر$) ≥ ٠ ، ر = ١، ٢، ...، ن

٢) $\sum_{ر=١}^{ن}$ ل($س_ر$) = ١

تدريب: في الأمثلة ١، ٢، ...، ٦ تحقق أن (ل) اقتران احتمال.

مثال: إذا كان التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي (س) معطى بالمجموعة {(٠، ٢ب)، (١، ٤ب)، (٢، ب)} جد قيمة (ب)؟

الحل:

مثال ٤: يمثل الجدول التالي التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي (س). ما قيمة الثابت (ب)؟

س	٠	١	٢
ل(س)	٠,٢	ب	٠,٥

الحل:

مثال ٥: أكمل جدول التوزيع الاحتمالي التالي للمتغير العشوائي (س) في إيجاد قيمة (م)؟

س	٠	١	٢
ل(س)	٠,١٧	م	٠,٠٥

الحل:

مثال ٦: س متغير عشوائي قيمه {١، ٢، ٣، ٤، ٥} حيث ل(س) = م س اقتران احتمالي، أوجد قيمة م؟ ثم جد ل(٢ ≤ س ≤ ٤)؟

الحل:

توزيع ذات الحدين

إذا أجريت تجربة برنولي (ن) من المرات وكان احتمال النجاح في المحاولة الواحدة (أ)، وكان (س) متغيراً عشوائياً ذات حدين الذي معاملاه (ن، أ) أي أن (س) يساوي عدد مرات النجاح من (ن) محاولة مستقلة ومتماثلة فإن احتمال النجاح في (ر) من المرات يساوي :-

$$ل(س = ر) = \binom{ن}{ر} (أ)^{ر} (1 - أ)^{ن - ر}$$

مثال ١: إذا كان (س) متغيراً عشوائياً ذا حدين معاملاه ن = ٤ ، أ = ٠,٢ ، جد

١) ل(س = ٣)

٢) ل(س ≥ ٣)   ٣) ل(س ≤ ١)

الحل:

مثال ٢: إذا كان (س) متغيراً عشوائياً ذا الحدين معاملاه ن = ٥ ، أ = ٠,٣ ، جد

١) ل(س = ٢) =

٢) ل(س > ١) =

٣) ل(س ≤ ٤) =

مثال ٣: إذا كانت ن = ٦ ، أ = $\frac{1}{5}$ معاملا ذات الحدين، أوجد :-

١) ل(١ > س ≤ ٢) =

٢) ل(٣ > س > ٤) =

٣) ل(س ≤ ١) =

مثال٤ : إذا كان (س) متغيراً عشوائياً يخضع لتوزيع ذات الحدين ﻥ = ٥ ، ﺃ = ٠.٩
أوجد :
١) ل (س = ٣) =

٢) ل (س ≥ ٤) =

٣) ل (٢ < س ≤ ٤) =

مثال٥ : إذا كان (س) متغيراً عشوائياً ذا الحدين معاملاه ﻥ = ٣ ، ﺃ = ٠.٢ ، جد :
١) مدى (س)

٢) جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي (س)

مثال٦ : عند رمي حجر نرد (٤) مرات متتالية ما احتمال ظهور العدد (٣) في ثلاث رميات ؟
الحل :

مثال٧ : إذا أُطلقت (٣) طلقات على هدف وكان احتمال إصابة الهدف يساوي (٠.٦) ودل المتغير العشوائي (س) على عدد الطلقات التي تُصيب الهدف . أوجد احتمال أن يُصيب الهدف طلقتان .
الحل :

مثال٨ : قررت إحدى الشركات رفض أي شحنة تشتريها من منتج ما إذا تبين وجود جزئيين معيبين أو أكثر في عينة عشوائية مكونة من (٧) وحدات . فإذا كانت نسبة المعيب في الإنتاج (١٠٪) أوجد احتمال رفض الشحنة ؟
الحل :

مثال ٩: إذا كان احتمال أن يصيب شخص هدفاً ما في كل طلقة يطلقها على الهدف = ٠.٧ فإذا أطلق (٥) طلقات، جد احتمال:

١) إصابة الهدف (٣) مرات.

٢) عدم إصابة الهدف.

٣) احتمال إصابة الهدف مرة واحدة على الأكثر.

مثال ١٠: إذا كانت نسبة الإنبات في بذور البندورة تساوي (٨٠٪) وتم زراعة (٥) بذرات في إحدى الحدائق جد احتمال إنبات:

١) (٥) بذرات.

٢) (٣) بذرات على الأقل.

مثال ١١: إذا كان احتمال نجاح تحليل مراجعة (٨٠٪) وتم إجراء (٣) تحليلات، جد احتمال نجاح عمليتين على الأقل:

الحل:

مثال ١٢: إذا كانت نسبة التالف من إنتاج مصنع لأجهزة الحاسوب (٠.١٠) وأخذت عينة حجمها (٥) أجهزة بطريقة عشوائية، جد احتمال أن تكون جميعها صالحة؟

الحل:

مثال ١٣: إذا كانت نسبة القطع المعيبة في إنتاج أحد المصانع (١٠٪). فإذا أخذت (٥) قطع من إنتاج المصنع بطريقة عشوائية جد احتمال:

١) أن لا نجد أي قطع معيبة

٢) أن يكون بينها قطعة واحدة معيبة

٣) أن لا يزيد عدد القطع المعيبة على قطعتين

٣) أن تحتاج إثنتان على الأكثر إلى إصلاح :

٤) أن تحتاج واحدة على الأقل إلى إصلاح :

مثال ١٤ : مصنع به (٥) آلات من نوع واحد إذا كان احتمال أن تحتاج أي آلة إلى إصلاح في السنة الخامسة من عمرها هو (٠,٢)

احسب احتمال أن :

١) ألا تحتاج أي من الآلات إلى إصلاح :

٢) أن تحتاج إثنتان فقط إلى إصلاح

مثال ١٥ : إذا كان (س) متغيراً عشوائياً يخضع لتوزيع ذات الحدين حيث (ن = ٣)

ل (س ≥ ١) = $\frac{١٩}{٢٧}$. فجد كلاً مما يلي :

١) قيمة (P)

٢) ل (س = ٢)

العلامة المعيارية

إذا كان الوسط الحسابي لعينة عشوائية (س̄) والانحراف المعياري (ع). فإن العلامة المعيارية لمشاهدة قيمتها في هذه العينة (س) هي: نسبة انحراف المشاهدة (س) عن وسطها الحسابي (س̄) إلى الانحراف المعياري (ع) ويرمز لها بالرمز (ز) أي أن:

$$ز_س = \frac{س - س̄}{ع}$$ ، ع ≠ ٠

مثال: إذا كان الوسط الحسابي لعلامات طلاب الصف الثاني الثانوي في الحاسوب (٦٥) والانحراف المعياري لها (٥) جد العلامة المعيارية لعلامات: خالد، عمار، جمال إذا كانت علاماتهم في الحاسوب على الترتيب (٧٥، ٦٥، ٦٠).

الحل:

مثال ٢: إذا كان الوسط الحسابي لعلامات صف ما في اللغة العربية = ٧٠ والانحراف المعياري للعلامات = ٥. جد العلامات المعيارية لعلامات: نزار، عمار، جمال إذا كانت علاماتهم في اللغة العربية على الترتيب هي (٨٢، ٧٠، ٦٥).

الحل:

ملاحظة: تمثل (ز) مساوية لعدد الانحرافات المعيارية التي تنحرفها المشاهدة (س) عن الوسط الحسابي للتوزيع، أما إشارة (ز) فتدل على موقع المشاهدة (س) من الوسط أو تحته.

مثال ٣: إذا كانت علامة (رنا) في اللغة العربية (٨٠) وفي اللغة الإنجليزية (٧٠) وكان الوسط الحسابي لعلامات اللغة العربية (٦٨) والانحراف المعياري لها (٨) أما الوسط الحسابي لعلامات اللغة الإنجليزية (٥٠) والانحراف المعياري لها (١٠) ففي أي المادتين كان مستوى تحصيل رهام أفضل؟

الحل:

نضال شلـــباية

مثال ٤: إذا كان الوسط الحسابي لعلامات الشعبة (أ) في الرياضيات = ٧٠ والانحراف المعياري = ٨ والوسط الحسابي لعلامات الشعبة (ب) = ٧٥ والانحراف المعياري لها = ٥ وكانت علامة أحد الطلاب في الشعبة (أ) = ٨٦ وعلامة أحد طلاب الشعبة (ب) = ٨١، فأي العلامتين أفضل؟

الحل:

مثال: إذا كانت علامة طالب في التجارة الالكترونية (٨٠) وعلامته في أساسيات الإدارة (٧٠) فأيهما أفضل مستوى تحصيل في التجارة أم في الأساسيات إذا علمت أن الوسط الحسابي للتجارة (٧٥) وانحرافها المعياري (٥) والوسط الحسابي للأساسيات (٦٢) وانحرافها المعياري (٤).

الحل:

مثال: إذا كان الوسط الحسابي لعلامات شعبة الأدبي في الرياضيات (٦٠) والانحراف المعياري لها (٥) والوسط الحسابي لعلامات شعبة (IT) في الرياضيات = (٧٠) والانحراف المعياري (٤)، وحصل أحد طلاب الأدبي على (٦٤) وأحد طلاب (IT) على (٦٢) فأي العلامتين أفضل؟

الحل:

مثال: إذا كان الوسط الحسابي لعلامات مبحث ما في اللغة الانجليزية (٦٠) والانحراف المعياري لها (١٠) جد:-

١) العلامة (س) التي قيمتها المعيارية (١,٥).

٢) العلامة التي تنحرف فوق الوسط انحرافين معياريين :

٣) العلامة التي تنحرف تحت الوسط انحرافاً معيارياً واحداً :

مثال ٨ : صف مكون من (٢٠) طالبة . إذا كانت علامات الطالبات هديل ، بشرى ، دانا هي (٩٠ ، ٨٠ ، ٧٠) على الترتيب وعلاماتهن المعيارية (٣ ، ٢ ، -١) فما علامة الطالبة دانا ؟

الحل :

مثال ٩ : إذا كانت العلامات المعيارية للطلبة أحمد ، محمد ، محمود هي (١,٥ ، -١ ، -٢) على الترتيب وكان الوسط الحسابي لعلامات الصف (٧٠) والفرق بين علامتي أحمد ومحمد (١٠) علامات . فما العلامات الفعلية للطلبة ؟

الحل :

تدريب:

اختر رمز الإجابة الصحيحة في كل مما يلي:

١) إذا كان الوسط الحسابي لمجموعة من القيم (٦٥) والانحراف المعياري (٤). فإن القيمة التي تنحرف (٣) انحرافات تحت الوسط الحسابي هي:

أ) ٧٧ ب) ٥٣

جـ) ١٢ د) -١٢

٢) إذا كانت علامتا طالبين من الصف السادس في الرياضيات (٨٥، ٧٠) والعلامتان المعياريتان المقابلتان لهاتين العلامتين هما (١، -٢) على الترتيب. فإن الانحراف المعياري لعلامات الرياضيات يساوي:

أ) ١٠ ب) ٥

جـ) ٣ د) ١

٣) إذا كان الفرق بين علامتي طالبين من الصف السادس في أحد الاختبارات هو (١٢) والفرق بين العلامتين المعياريتين المناظرتين لهما (١٫٢) فإن الانحراف المعياري لعلامات الطلاب في هذا الاختبار يساوي:

أ) ١٫٢٠ ب) ٦

جـ) ١٠ د) ١٢

٤) إذا كان الوسط الحسابي لعلامات اللغة العربية يساوي (٦) والانحراف المعياري (٥) فإن العلامة المعيارية للعلامة (٥٨) هي:

أ) ٦ ب) ١٢

جـ) ٨ د) ٤

التوزيع الطبيعي

التوزيع الطبيعي المعياري :

هو توزيع طبيعي وسطه الحسابي (صفر) وانحرافه المعياري (١) ومتغيره العشوائي العلامة المعيارية (ز) .

قوانين هامة :

١) ل(ز ≥ أ) من الجدول مباشرة

٢) ل(ز ≥ -أ) = ١ - ل(ز ≥ أ)

٣) ل(ز ≤ أ) = ١ - ل(ز ≥ أ)

٤) ل(ز ≤ -أ) = ل(ز ≥ أ)

٥) ل(-أ ≥ ز ≥ ب) = ل(ز ≥ ب) - ل(ز ≥ -أ)

= ل(ز ≥ ب) - (١ - ل(ز ≥ أ))

مثال : إذا كان (ز) متغير عشوائي طبيعي معياري جد قيمة كل مما يأتي باستخدام جدول التوزيع الطبيعي :

١) ل(ز ≥ ١,٢٥) =

٢) ل(ز ≤ -١,٥) =

٣) ل(-٢ ≥ ز ≥ ٢) =

مثال : ليكن (ز) متغير عشوائي طبيعي معياري جد قيمة كل مما يأتي :

١) ل(ز ≤ ٢) =

٢) ل(ز ≥ -٠,٨٥) =

٣) ل(٠,٩ ≥ ز ≥ ١,٥) =

٤) ل(-١,٧ ≥ ز ≥ صفر) =

٥) ل(ز ≥ ٢,٨٥) =

٦) ل(ز ≤ ١) =

٧) ل(ز ≥ -٠,٥) =

٨) ل(ز ≤ -٠,٦٥) =

٩) ل(٠,٨ ≥ ز ≥ ٢,٥) =

مثال٤: ليكن (ز) متغيراً عشوائياً طبيعياً معيارياً، استعمل جدول التوزيع الطبيعي في إيجاد قيمة (م) في كل من الحالات التالية:

١) ل(ز ≤ م) = ٠,٨٥٩٩

٢) ل(ز ≥ م) = ٠,٠٣

٣) ل(ز ≥ م) = ٠,٦٧

٤) ل(ز ≤ م) = ٠,٧٤٨٦

٥) ل(ز ≥ م) = ٠,٩٨٧١

١٠) ل(-٢ ≤ ز ≤ -١) =

١١) ل(-٣ ≤ ز ≤ ٢) =

١٢) ل(-١,٦ ≤ ز ≤ صفر) =

١٣) ل(-٠,٤٥ ≤ ز ≤ ١,٣) =

مثال٣: جد احتمال أن تقع قيمة (ز) ضمن انحرافين معياريين عن الوسط الحسابي:

الحل:

٦) ل (ز ≥ ٢) = ٠,٢٥٤٦

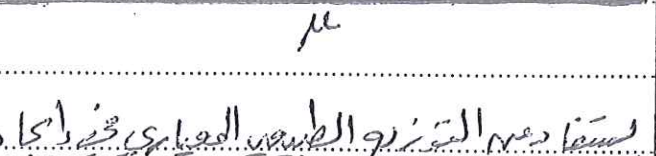
٧) ل (ز ≤ ٢) = ٠,٨٣١٢

ملاحظة: يرمز للوسط الحسابي للمجتمع الإحصائي بالرمز (μ) والانحراف المعياري (σ) أما للعينة الوسط الحسابي ($\bar{س}$) والانحراف المعياري (ع).

- خواص منحنى التوزيع الطبيعي

١) متماثل حول الوسط

٢) المنوال = الوسيط = الوسط الحسابي



يستفاد من التوزيع الطبيعي المعياري في إيجاد الاحتمالات للمتغير العشوائي المتصل (س) التي يتبع التوزيع الطبيعي من خلال تحويل العلامة الخام (س) إلى المعيارية (ز)

قاعدة: إذا كان (س) متغيراً عشوائياً طبيعياً وسطه (μ) وانحرافه المعياري (σ) فإن العلامة المعيارية (ز) للمتغير العشوائي (س) هي:

$$ز = \frac{س - \mu}{\sigma}$$

مثال: إذا كان (س) متغير عشوائي يتبع التوزيع الطبيعي الذي وسطه الحسابي (٦٠) وانحرافه المعياري (٥) جد:

١) القيمة المعيارية المقابلة للقيمة س = ٦٨

٢) قيمة (س) التي تقابل القيمة المعيارية (٢)

مثال: إذا كان (س) متغيراً عشوائياً يتبع التوزيع الطبيعي الذي وسطه الحسابي (٦٥) وانحرافه المعياري (٦). جد

١) ل (س ≤ ٦٨) =

٢) ل(س ≤ ٥٥) =

مثال: (س) متغير عشوائي طبيعي وسطه الحسابي (٦٠) وانحرافه المعياري (٨) فجد:

١) ل(س ≤ ٧٦) =

٢) ل(س ≥ ٤٨) =

مثال: إذا كانت علامات امتحان عام يتبع توزيع طبيعي وسطه الحسابي (٧٠) وانحرافه المعياري (١٠) جد:

١) نسبة العلامات التي تزيد عن (٩٠)

٢) نسبة العلامات التي تقل عن (٦٠):

مثال: يخضع معامل الذكاء للطلبة المسجلين في إحدى الجامعات لتوزيع طبيعي وسطه (١٠٥) وانحرافه (١٠). إذا تم اختيار أحد الطلبة عشوائياً، جد احتمال:

١) أن يكون من الطلبة الذين معامل ذكائهم أقل من (١١٠).

٢) أن يكون من الطلبة الذين معامل ذكائهم أكبر من (١١٠).

مثال٢: إذا كانت أوزان الأطفال عند الولادة
تتبع توزيع طبيعي بوسط الحسابي (٣٫٢) كغم
وانحراف المعياري (٠٫٤). إذا أختير طفل
عشوائياً عند الولادة فما احتمال أن يكون
وزنه أكبر من (٤) كغم

الحل:

مثال٣: إذا كانت أوزان طلبة إحدى المدارس
وعددهم (٥٠٠) طالب تتبع التوزيع الطبيعي
وكان الوسط الحسابي لأوزانهم (٥٥) كغم
والانحراف المعياري (٦) كغم. إذا أختير
أحد الطلبة عشوائياً، جد:

١) احتمال أن يكون من الطلبة التي تقل
أوزانهم عن (٤٩) كغم

٢) احتمال أن يكون من الطلبة التي تزيد أوزانهم
عن (٥٨) كغم.

٣) ما عدد الطلبة الذين تنحصر أوزانهم
بين (٥٢) كغم و (٦١) كغم؟

مثال٤: إذا كانت أعمار (١٠٠٠) شخص تأخذ شكل
التوزيع الطبيعي بوسط حسابي يساوي (٥٢) سنة
وانحراف معياري (١٠) سنوات. إذا أختير
شخص عشوائياً فما احتمال أن يكون ممن تتراوح
أعمارهم بين (٤٦) سنة و (٥٨) سنة؟

الحل:

نضال شلـــباية

مثال ٣: إذا كانت أوزان سبائك ذهبية تأخذ شكل التوزيع الطبيعي بوسط حسابي يساوي (٥٠) غم وانحراف معياري (١٠) غم. إذا تم اختيار أحد السبائك، فما احتمال أن يكون وزنها أقل من (٤٤،٩) غم.

الحل:

مثال ١٥: إذا كانت علامات (١٠٠٠) طالب تتخذ شكل التوزيع الطبيعي وكان الوسط الحسابي (٦٥) والانحراف المعياري (١٠)، وكان عدد الناجحين (٧٥٨) طالب، فما علامة النجاح؟

الحل:

مثال ١٤: تخضع عبوات أحد المنتجات الزراعية لتوزيع طبيعي وسطه (٢٥) كغم وانحرافه المعياري (٢) كغم. إذا اخترت إحدى العبوات عشوائياً، فما احتمال

١) أن يزيد وزنها عن (٢٧) كغم

٢) أن ينحصر وزنها بين (٢٤،٥) كغم و (٢٥،٥) كغم

نضال شلـــباية

الارتباط ومعامل الارتباط

تواجهنا الكثير من الظواهر تتعلق بمتغيرين تحتاج لدراستها بشكل بياني؟ ومن الأمثلة على ذلك:

١) العلاقة بين أطوال الأفراد وأوزانهم

٢) العلاقة بين عدد ساعات الدراسة والتحصيل الدراسي.

٣) العلاقة بين وزن المريض وضغط دمه.

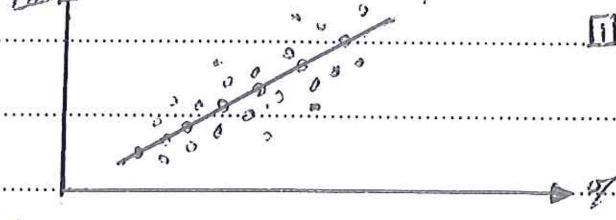
إذا رمزنا لأحد المتغيرين بالرمز (س) والآخر (ص) فنحصل على مجموعة أزواج مرتبة

(س١، ص١)، (س٢، ص٢)، ....، (سن، صن)

يتم تمثيلها بيانياً في المستوى الإحداثي ويسمى الشكل الناتج بشكل الانتشار، ومن خلال الشكل يمكن معرفة طبيعة العلاقة بين المتغيرين قيد الدراسة واتجاهها وقوة الارتباط بينهما.

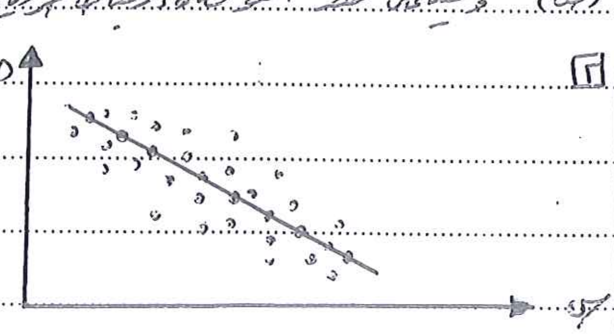
* أنواع الارتباط

[1]



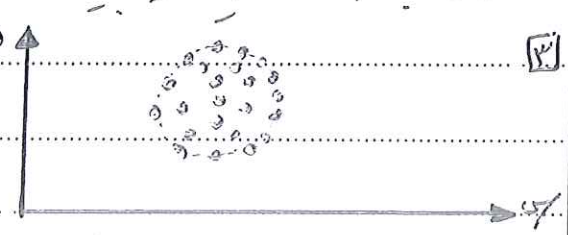
نلاحظ أنه بازدياد قيم (س) تزداد قيم (ص) ويسمى هذا النوع ارتباطاً طردياً (إيجابياً).

[2]



نلاحظ أنه بازدياد قيم (س) تتناقص قيم (ص) ويسمى هذا النوع "ارتباطاً عكسياً سلبياً".

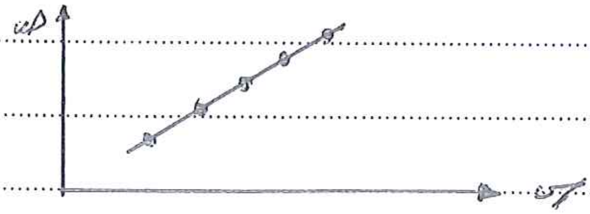
[3]



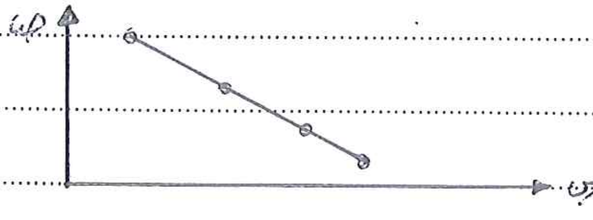
نلاحظ أن الشكل لا يشير إلى وجود أي نوع من الارتباط بين المتغيرين (س) و(ص) حيث تتجمع النقاط على شكل دائرة مما يدل على "عدم وجود ارتباط خطي".

مثال: ما نوع الارتباط بين المتغيرين س، ص في كل من الأشكال التالية:

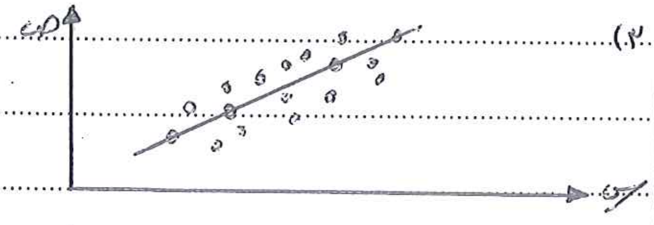
١)



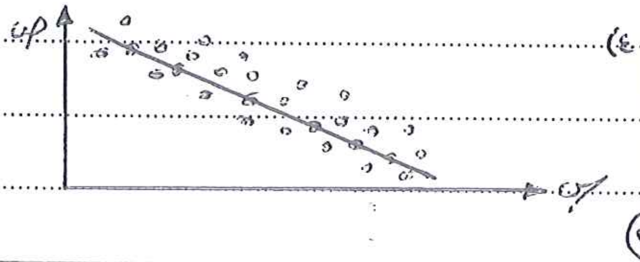
٢)



٣)



٤)



نضال شلباية

مثال ١: يبين الجدول التالي أطوال (١٠) طلاب بالسنتيمترات وأوزانهم بالكيلوغرامات. ارسم شكل الانتشار بين المتغيرين س، ص ثم بين نوع الارتباط.

س	١٤٥	١٥٠	١٥٥	١٥٨	١٦٣	١٦٨	١٦٥	١٧٥
ص	٥٠	٥٥	٥٠	٦٠	٧٥	٧٠	٦٤	٨٠

الحل:

مثال ٣: يبين الجدول التالي إنتاج الأردن من القمح والشعير خلال السنوات ٢٠٠٢ - ٢٠٠٦. ارسم شكل الانتشار وحدد نوع العلاقة:

السنة	٢٠٠٢	٢٠٠٣	٢٠٠٤	٢٠٠٥	٢٠٠٦
القمح (س)	٧٥,٥	٥٧,١	٤٦,٩	٥٨,٥	٤٢,٧
الشعير (ص)	٦٨,٩	٣١,٨	٢٧,٤	٣١,٧	٢٩,٢

الحل:

معامل ارتباط بيرسون

$$ر = \frac{\sum (س - \bar{س})(ص - \bar{ص})}{\sqrt{\sum (س - \bar{س})^2 \times \sum (ص - \bar{ص})^2}}$$

مثال ٤: يمثل الجدول التالي علامات (٦) طلاب في الرياضيات (س) والجغرافيا (ص) علامة العظمى (١٠)، احسب معامل ارتباط بيرسون.

رقم الطالب	١	٢	٣	٤	٥	٦
س	٦	٧	٥	٣	٥	٤
ص	٥	٦	٤	١	٥	٣

الحل:

مثال ٥ : احسب معامل ارتباط بيرسون بين المتغيرين س، ص فيما يلي :-

س	١١	١٠	١٢	١٤	٨
ص	١٤	١٠	٦	٩	١١

الحل :

مثال ٦ : احسب معامل ارتباط بيرسون بين المتغيرين س، ص فيما يلي :

س	٥	٦	٧	٨	١٤
ص	٦	٧	٨	٩	١٠

الحل :

مثال ٦ : إحسب معامل ارتباط بيرسون بين معامل الذكاء (س) وعلامة الرياضيات (ص) في الجدول التالي :

رقم الطالب	١	٢	٣	٤	٥
معامل الذكاء (س)	١٣٠	١٢٠	١١٥	١١٠	١٠٠
علامة الرياضيات (ص)	٩٥	٧٠	٨٥	٨٠	٥٠

الحل :

مثال ٥ : إذا كان س، ص متغيرين عدد قيم كل منهما (١٠) قيم وكان $\sum_{ر=1}^{10} (س-\bar{س})^2 = ٣٦$

$\sum_{ر=1}^{10} (ص-\bar{ص})^2 = ١٦٠$ ، $\sum (س-\bar{س})(ص-\bar{ص}) = ١٨٠$

إحسب معامل ارتباط بيرسون بين المتغيرين س، ص :

الحل :

خطر :

$$ر = \frac{\sum (س-\bar{س})(ص-\bar{ص})}{\sqrt{\sum (س-\bar{س})^2 \times \sum (ص-\bar{ص})^2}}$$

* ملاحظات (حول معامل ارتباط بيرسون)

١) -١ ≤ ر ≤ ١

٢) ٠ < ر ≤ ١ ارتباط خطي طردي إيجابي

٣) -١ ≤ ر < ٠ ارتباط خطي عكسي سلبي

٤) تزداد القيمة المطلقة لمعامل الارتباط كلما اقتربت النقاط من الخط المستقيم وتقل كلما ابتعدت النقاط عن المستقيم.

٥) ر = ±١ الارتباط تام

تدريب: في الأمثلة السابقة حدد نوع الارتباط في كل منها؟

أثر التحويلات الخطية في معامل ارتباط بيرسون

إذا كان معامل ارتباط بيرسون بين المتغيرين (س، ص) يساوي (ر) وتحولت قيم كل من (س، ص) حسب العلاقة:

س* = أ س + ب

ص* = جـ ص + د

حيث أ، ب، جـ، د ∈ ح (أ، جـ ≠ ٠)

فإن (ر) معامل الارتباط بين س*، ص* يساوي:

١) (ر) إذا كانت إشارتا أ، جـ متشابهتين

٢) (-ر) إذا كانت إشارتا أ، جـ مختلفتين

مثال ٩: إذا كان معامل ارتباط بيرسون بين س، ص هو (٠.٨). جد معامل الارتباط بين س*، ص* في كل مما يلي:

١) س* = ٣س - ١ ، ص* = ٥ص + ٣

٢) س* = ٥س + ٢ ، ص* = ٧ - ص

مثال ١٠: إذا كان معامل ارتباط بيرسون بين س، ص هو (-٠.٧) جد معامل الارتباط بين س*، ص* في كل مما يلي:

١) س* = ٧س - ٤ ، ص* = ص - ٨

٢) س* = ٣ - ٢س ، ص* = ٩ - ص

مثال ١١: إذا كان معامل الارتباط بين س، ص هو (٥٦%) فإن قيمة الارتباط بين س*، ص* حيث س* = ١ - ٢س ، ص* = ص + ٤ تساوي:

أ) ٠.٧ جـ) ٠.٥٦

ب) -٠.٧ د) -٠.٥٦

الانحدار

- الخطأ في التنبؤ = ص − $\hat{ص}$

- معادلة خط الانحدار هي :

$\hat{ص} = أ س + ب$

حيث :

$$أ = \frac{مج (س - \bar{س})(ص - \bar{ص})}{مج (س - \bar{س})^2}$$

$ب = \bar{ص} - أ \bar{س}$

ص : القيمة الحقيقية .

$\hat{ص}$: القيمة المتنبأ بها .

$\bar{س}$: الوسط الحسابي لـ (س)

$\bar{ص}$: الوسط الحسابي لـ (ص)

مثال : يمثل الجدول التالي قيم المتغيرين س ، ص

س	ص	$(س - \bar{س})$	$(ص - \bar{ص})$	٢ × ١	$(١)^2$
٥	٢				
٦	٥				
٢	٣				
٧	٦				

أوجد :

أ) معادلة خط الانحدار

ب) القيمة المتنبأ بها إذا كانت س = ٧

جـ) خطأ التنبؤ عند س = ٥

الحل :

مثال ١: يبين الجدول التالي معدلات (٥) طالبات في الثانوية العامة في الدورة الشتوية وعدد الساعات التي تقضيها الطالبة يومياً في الدراسة :

عدد الساعات (س)	المعدل (ص)			
٨	٩٥			
٢	٦٥			
٥	٩٠			
٣	٧٠			
٧	٩٠			

أوجد:

أ) معادلة خط الانحدار

ب) قدر المعدل المتوقع لطالبة تدرس (٦) ساعات

ج) درست طالبة (٨) ساعات وحصلت على معدل (٩٥) احسب الخطأ في التنبؤ.

الحل:

مثال ٢: يمثل الجدول التالي معامل الذكاء ومعدل التحصيل لـ (٦) طلاب :

معامل الذكاء (س)	معدل التحصيل (ص)			
٩٥	٥٣			
١٠٦	٦٢			
١١٩	٨٧			
١١٣	٧٥			
١١٥	٨٦			
١٢٤	٩٣			

أوجد :-

أ) جد معادلة خط الانحدار للتنبؤ بقيم ص

ب) قدر معدل التحصيل المتنبأ به لطالب معامل ذكائه (١٢٠).

الحل:

س٤: يبين الجدول التالي قيم المتغيرين (س، ص):

س	ص			
١	١٠			
٣	٨			
٦	٩			
٧	٥			

أ) جد معامل ارتباط بيرسون.

ب) جد معادلة خط الانحدار.

الحل:

س٥: إذا كان س، ص يمثلان رأس المال وأرباح الشركة مقدرة بآلاف الدنانير على الترتيب، وجمعت البيانات الآتية لخمس شركات:

$\bar{س} = ١٠$ $\bar{ص} = ١٢$

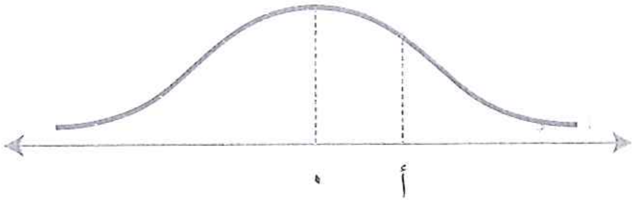
$مج(س - \bar{س})^2 = ١٠٠٠$ $مج(س - \bar{س})(ص - \bar{ص}) = ٨٠$

أ) جد معادلة خط الانحدار

ب) قدر ربح شركة رأس مالها س = ١١ دينار

الحل:

جدول التوزيع الطبيعي المعياري



ز	٠,٠٠	٠,٠١	٠,٠٢	٠,٠٣	٠,٠٤	٠,٠٥	٠,٠٦	٠,٠٧	٠,٠٨	٠,٠٩
٠,٠	٠,٥٠٠٠	٠,٥٠٤٠	٠,٥٠٨٠	٠,٥١٢٠	٠,٥١٦٠	٠,٥١٩٩	٠,٥٢٣٩	٠,٥٢٧٩	٠,٥٣١٩	٠,٥٣٥٩
٠,١	٠,٥٣٩٨	٠,٥٤٣٨	٠,٥٤٧٨	٠,٥٥١٧	٠,٥٥٥٧	٠,٥٥٩٦	٠,٥٦٣٦	٠,٥٦٧٥	٠,٥٧١٤	٠,٥٧٥٣
٠,٢	٠,٥٧٩٣	٠,٥٨٣٢	٠,٥٨٧١	٠,٥٩١٠	٠,٥٩٤٨	٠,٥٩٨٧	٠,٦٠٢٦	٠,٦٠٦٤	٠,٦١٠٣	٠,٦١٤١
٠,٣	٠,٦١٧٩	٠,٦٢١٧	٠,٦٢٥٥	٠,٦٢٩٣	٠,٦٣٣١	٠,٦٣٦٨	٠,٦٤٠٦	٠,٦٤٤٣	٠,٦٤٨٠	٠,٦٥١٧
٠,٤	٠,٦٥٥٤	٠,٦٥٩١	٠,٦٦٢٨	٠,٦٦٦٤	٠,٦٧٠٠	٠,٦٧٣٦	٠,٦٧٧٢	٠,٦٨٠٨	٠,٦٨٤٤	٠,٦٨٧٩
٠,٥	٠,٦٩١٥	٠,٦٩٥٠	٠,٦٩٨٥	٠,٧٠١٩	٠,٧٠٥٤	٠,٧٠٨٨	٠,٧١٢٣	٠,٧١٥٧	٠,٧١٩٠	٠,٧٢٢٤
٠,٦	٠,٧٢٥٧	٠,٧٢٩١	٠,٧٣٢٤	٠,٧٣٥٧	٠,٧٣٨٩	٠,٧٤٢٢	٠,٧٤٥٤	٠,٧٤٨٦	٠,٧٥١٧	٠,٧٥٤٩
٠,٧	٠,٧٥٨٠	٠,٧٦١١	٠,٧٦٤٢	٠,٧٦٧٣	٠,٧٧٠٤	٠,٧٧٣٤	٠,٧٧٦٤	٠,٧٧٩٤	٠,٧٨٢٣	٠,٧٨٥٢
٠,٨	٠,٧٨٨١	٠,٧٩١٠	٠,٧٩٣٩	٠,٧٩٦٧	٠,٧٩٩٥	٠,٨٠٢٣	٠,٨٠٥١	٠,٨٠٧٨	٠,٨١٠٦	٠,٨١٣٣
٠,٩	٠,٨١٥٩	٠,٨١٨٦	٠,٨٢١٢	٠,٨٢٣٨	٠,٨٢٦٤	٠,٨٢٨٩	٠,٨٣١٥	٠,٨٣٤٠	٠,٨٣٦٥	٠,٨٣٨٩
١,٠	٠,٨٤١٣	٠,٨٤٣٨	٠,٨٤٦١	٠,٨٤٨٥	٠,٨٥٠٨	٠,٨٥٣١	٠,٨٥٥٤	٠,٨٥٧٧	٠,٨٥٩٩	٠,٨٦٢١
١,١	٠,٨٦٤٣	٠,٨٦٦٥	٠,٨٦٨٦	٠,٨٧٠٨	٠,٨٧٢٩	٠,٨٧٤٩	٠,٨٧٧٠	٠,٨٧٩٠	٠,٨٨١٠	٠,٨٨٣٠
١,٢	٠,٨٨٤٩	٠,٨٨٦٩	٠,٨٨٨٨	٠,٨٩٠٧	٠,٨٩٢٥	٠,٨٩٤٤	٠,٨٩٦٢	٠,٨٩٨٠	٠,٨٩٩٧	٠,٩٠١٥
١,٣	٠,٩٠٣٢	٠,٩٠٤٩	٠,٩٠٦٦	٠,٩٠٨٢	٠,٩٠٩٩	٠,٩١١٥	٠,٩١٣١	٠,٩١٤٧	٠,٩١٦٢	٠,٩١٧٧
١,٤	٠,٩١٩٢	٠,٩٢٠٧	٠,٩٢٢٢	٠,٩٢٣٦	٠,٩٢٥١	٠,٩٢٦٥	٠,٩٢٧٩	٠,٩٢٩٢	٠,٩٣٠٦	٠,٩٣١٩
١,٥	٠,٩٣٣٢	٠,٩٣٤٥	٠,٩٣٥٧	٠,٩٣٧٠	٠,٩٣٨٢	٠,٩٣٩٤	٠,٩٤٠٦	٠,٩٤١٨	٠,٩٤٢٩	٠,٩٤٤١
١,٦	٠,٩٤٥٢	٠,٩٤٦٣	٠,٩٤٧٤	٠,٩٤٨٤	٠,٩٤٩٥	٠,٩٥٠٥	٠,٩٥١٥	٠,٩٥٢٥	٠,٩٥٣٥	٠,٩٥٤٥
١,٧	٠,٩٥٥٤	٠,٩٥٦٤	٠,٩٥٧٣	٠,٩٥٨٢	٠,٩٥٩١	٠,٩٥٩٥	٠,٩٦٠٨	٠,٩٦١٦	٠,٩٦٢٥	٠,٩٦٣٣
١,٨	٠,٩٦٤١	٠,٩٦٤٩	٠,٩٦٥٦	٠,٩٦٦٤	٠,٩٦٧١	٠,٩٦٧٨	٠,٩٦٨٦	٠,٩٦٩٣	٠,٩٦٩٩	٠,٩٧٠٦
١,٩	٠,٩٧١٣	٠,٩٧١٩	٠,٩٧٢٦	٠,٩٧٣٢	٠,٩٧٣٨	٠,٩٧٤٤	٠,٩٧٥٠	٠,٩٧٥٦	٠,٩٧٦١	٠,٩٧٦٧
٢,٠	٠,٩٧٧٢	٠,٩٧٧٨	٠,٩٧٨٣	٠,٩٧٨٨	٠,٩٧٩٣	٠,٩٧٩٨	٠,٩٨٠٣	٠,٩٨٠٨	٠,٩٨١٢	٠,٩٨١٧
٢,١	٠,٩٨٢١	٠,٩٨٢٦	٠,٩٨٣٠	٠,٩٨٣٤	٠,٩٨٣٨	٠,٩٨٤٢	٠,٩٨٤٦	٠,٩٨٥٠	٠,٩٨٥٤	٠,٩٨٥٧
٢,٢	٠,٩٨٦١	٠,٩٨٦٤	٠,٩٨٦٨	٠,٩٨٧١	٠,٩٨٧٥	٠,٩٨٧٨	٠,٩٨٨١	٠,٩٨٨٤	٠,٩٨٨٧	٠,٩٨٩٠
٢,٣	٠,٩٨٩٣	٠,٩٨٩٦	٠,٩٨٩٨	٠,٩٩٠١	٠,٩٩٠٤	٠,٩٩٠٦	٠,٩٩٠٩	٠,٩٩١١	٠,٩٩١٣	٠,٩٩١٦
٢,٤	٠,٩٩١٨	٠,٩٩٢٠	٠,٩٩٢٢	٠,٩٩٢٥	٠,٩٩٢٧	٠,٩٩٢٩	٠,٩٩٣١	٠,٩٩٣٢	٠,٩٩٣٤	٠,٩٩٣٦
٢,٥	٠,٩٩٣٨	٠,٩٩٤٠	٠,٩٩٤١	٠,٩٩٤٣	٠,٩٩٤٥	٠,٩٩٤٦	٠,٩٩٤٨	٠,٩٩٤٩	٠,٩٩٥١	٠,٩٩٥٢
٢,٦	٠,٩٩٥٣	٠,٩٩٥٥	٠,٩٩٥٦	٠,٩٩٥٧	٠,٩٩٥٩	٠,٩٩٦٠	٠,٩٩٦١	٠,٩٩٦٢	٠,٩٩٦٣	٠,٩٩٦٤
٢,٧	٠,٩٩٦٥	٠,٩٩٦٦	٠,٩٩٦٧	٠,٩٩٦٨	٠,٩٩٦٩	٠,٩٩٧٠	٠,٩٩٧١	٠,٩٩٧٢	٠,٩٩٧٣	٠,٩٩٧٤
٢,٨	٠,٩٩٧٤	٠,٩٩٧٥	٠,٩٩٧٦	٠,٩٩٧٧	٠,٩٩٧٧	٠,٩٩٧٨	٠,٩٩٧٩	٠,٩٩٧٩	٠,٩٩٨٠	٠,٩٩٨١
٢,٩	٠,٩٩٨١	٠,٩٩٨٢	٠,٩٩٨٢	٠,٩٩٨٣	٠,٩٩٨٤	٠,٩٩٨٤	٠,٩٩٨٥	٠,٩٩٨٥	٠,٩٩٨٦	٠,٩٩٨٦
٣,٠	٠,٩٩٨٧	٠,٩٩٨٧	٠,٩٩٨٧	٠,٩٩٨٨	٠,٩٩٨٨	٠,٩٩٨٩	٠,٩٩٨٩	٠,٩٩٨٩	٠,٩٩٩٠	٠,٩٩٩٠
٣,١	٠,٩٩٩٠	٠,٩٩٩١	٠,٩٩٩١	٠,٩٩٩١	٠,٩٩٩٢	٠,٩٩٩٢	٠,٩٩٩٢	٠,٩٩٩٢	٠,٩٩٩٣	٠,٩٩٩٣
٣,٢	٠,٩٩٩٣	٠,٩٩٩٣	٠,٩٩٩٤	٠,٩٩٩٤	٠,٩٩٩٤	٠,٩٩٩٤	٠,٩٩٩٤	٠,٩٩٩٥	٠,٩٩٩٥	٠,٩٩٩٥
٣,٣	٠,٩٩٩٥	٠,٩٩٩٥	٠,٩٩٩٥	٠,٩٩٩٦	٠,٩٩٩٦	٠,٩٩٩٦	٠,٩٩٩٦	٠,٩٩٩٦	٠,٩٩٩٦	٠,٩٩٩٧
٣,٤	٠,٩٩٩٧	٠,٩٩٩٧	٠,٩٩٩٧	٠,٩٩٩٧	٠,٩٩٩٧	٠,٩٩٩٧	٠,٩٩٩٧	٠,٩٩٩٧	٠,٩٩٩٧	٠,٩٩٩٨